МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

# Интегральное исчисление функций одной переменной

# Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

# Дифференциальные уравнения

Методические рекомендации и варианты заданий аттестационных работ
по курсу «Математика» для студентов строительных специальностей
дневной формы обучения

Брест 2015

УДК 517(076)

В настоящей методической разработке приведены варианты заданий аттестационных работ по разделам «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных», «Дифференциальные уравнения» дисциплины «Математика», изучаемым студентами строительных специальностей дневной формы обучения во втором семестре. Приведено подробное решение типовых задач, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий.

**Составители:** **Махнист Л.П.**, доцент, к.т.н.
**Юхимук М.М.**, старший преподаватель,
**Юхимук Т.Ю.**, старший преподаватель

**Рецензент: Басик А.И.**, доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н.

## I. Практические задания по теме «Интегральное исчисление функций одной переменной»

**№1.** Найти неопределенный интеграл.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3} - 2x^2 + 4}{x^3}dx$

2. $\displaystyle\int \left( x\sqrt{x^5} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{x^2} - 1 \right)dx$

3. $\displaystyle\int \left( 5x + \frac{3\sqrt[6]{x}}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right)dx$

4. $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 2\sqrt{x^7} + 2}{2\sqrt{x^3}}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{5x - 4\sqrt[3]{x^7} - 10}{x}dx$

6. $\displaystyle\int \left( \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{5x^8}{x^2} - \frac{6}{x} \right)dx$

7. $\displaystyle\int \left( \frac{5x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[5]{x^3}}{2\sqrt{x^5}} - 8x \right)dx$

8. $\displaystyle\int \frac{7 - 6x^4 + 2\sqrt{x^3}}{2\sqrt[8]{x}}dx$

9. $\displaystyle\int \left( \frac{3\sqrt{x}}{x^4} - \sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{x} \right)dx$

10. $\displaystyle\int \frac{5x^4 + 3\sqrt[4]{x^7} + 1}{x}dx$

11. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 3\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}dx$

12. $\displaystyle\int \left( \frac{2\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^5} - 7 \right)dx$

13. $\displaystyle\int \left( \frac{2}{x^3} - x^7\sqrt{x^5} + 10 \right)dx$

14. $\displaystyle\int \left( \frac{2\sqrt[5]{x^2}}{3x^4} - x^8 - \frac{3}{7x} \right)dx$

15. $\displaystyle\int \frac{2\sqrt[3]{x^5} - 4x^2 + 5}{x^2}dx$

16. $\displaystyle\int \left( \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{7x^3}{\sqrt{x^5}} - \frac{8}{x} \right)dx$

17. $\displaystyle\int \left( 2 - \frac{5\sqrt{x}}{x^2} + \frac{4}{\sqrt[9]{x^7}} \right)dx$

18. $\displaystyle\int \frac{2\sqrt{x^5} + x^7 - 6}{x^4}dx$

19. $\displaystyle\int \left( 4 - \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^7}} \right)dx$

20. $\displaystyle\int \frac{5 - \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^4}}{4x}dx$

21. $\displaystyle\int \left( \frac{5\sqrt{x}}{x} + \frac{7}{2\sqrt{x^7}} - 8 \right)dx$

22. $\displaystyle\int \left( 16x - \frac{2\sqrt{x^5}}{x^5} + \frac{x^6}{3\sqrt{x^7}} \right)dx$

23. $\displaystyle\int \frac{2x^5 - 4\sqrt[3]{x^2} + 5x}{3x}dx$

24. $\displaystyle\int \left( \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^4}} + \frac{7x^8}{2\sqrt{x}} - 8x^3 \right)dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3\sqrt{x^5} + 8}{\sqrt{x}}dx$

26. $\displaystyle\int \left( \frac{2}{x^5} - 3x^3\sqrt{x^5} + 9 \right)dx$

27. $\displaystyle\int \frac{5\sqrt{x^3} - 4\sqrt[5]{x^2} - 6}{x^4}dx$

28. $\displaystyle\int \frac{2 - \sqrt[5]{x^3} + 4x}{3x^2}dx$

29. $\displaystyle\int \left( \frac{\sqrt{x^5}}{4x^2} + \frac{3}{5}x\sqrt[4]{x^3} - x \right)dx$

30. $\displaystyle\int \left( 8x^3 + 4\sqrt[5]{x^3} - \frac{8x}{\sqrt[4]{x^3}} \right)dx$

**№2.** Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^6 3x} dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-8x^2}}$

3. $\int \sin^4 2x \cos 2x \, dx$

4. $\int \frac{7x \, dx}{4x^2+25}$

5. $\int e^{4x+5} dx$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{ctg} 5x}}{\sin^2 5x} dx$

7. $\int \frac{\sqrt{3} \, dx}{\sqrt{10+4x^2}}$

8. $\int \frac{dx}{5-4x^2}$

9. $\int \frac{dx}{25+5x^2}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2} \arcsin^5 3x}$

11. $\int \frac{\ln^6 (3+4x)}{(3+4x)} dx$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2x-3}}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

14. $\int \sqrt[5]{\cos^3 7x} \sin 7x \, dx$

15. $\int \cos(5x+9) dx$

16. $\int \sin(3-8x) dx$

17. $\int \frac{dx}{2x^2-3}$

18. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[5]{\ln^6 (1-x)}}$

19. $\int \frac{4x^4 \, dx}{2x^5+25}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}$

21. $\int \frac{\arccos^4 7x}{\sqrt{1-49x^2}} dx$

22. $\int \frac{\sqrt{\ln(5-x)}}{(5-x)} dx$

23. $\int \frac{dx}{3x-2}$

24. $\int \frac{dx}{(1+81x^2)\sqrt[5]{\mathrm{arcctg} 9x}}$

25. $\int \frac{dx}{e^{3x-2}}$

26. $\int \frac{dx}{3x^2+7}$

27. $\int \frac{dx}{\cos^2 6x \cdot \mathrm{tg} 6x} dx$

28. $\int \frac{3x \, dx}{\sqrt{2x^2-5}}$

29. $\int \frac{dx}{(3x-2)\ln(3x-2)}$

30. $\int \frac{\mathrm{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$

**№3.** Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{x-2}{x^2-6x+7}dx$

2. $\int \frac{3x^2+5x-10}{(x^2-4)(x+1)}dx$

3. $\int \frac{4x-3}{x^2+2x-4}dx$

4. $\int \frac{x^2+8x-5}{x^3-x^2}dx$

5. $\int \frac{5-2x}{x^2-8x-3}dx$

6. $\int \frac{x^2-7x-58}{(x^2-x-6)(x+4)}dx$

7. $\int \frac{5x-6}{x^2-8x+17}dx$

8. $\int \frac{2x^2-13x+32}{(x+5)(x^2-4x+4)}dx$

9. $\int \frac{5-x}{x^2+8x-13}dx$

10. $\int \frac{6x^2-9x+4}{x^3(x-4)}dx$

11. $\int \frac{7x+4}{x^2+10x-7}dx$

12. $\int \frac{-3x-27}{(x+5)(x^2+3x-4)}dx$

13. $\int \frac{7x+11}{x^2-14x+6}dx$

14. $\int \frac{11-19x}{(x^2+5x-14)(x-1)}dx$

15. $\int \frac{4-3x}{x^2+8x-15}dx$

16. $\int \frac{x^2-6x-19}{(x^2-x-6)(x-1)}dx$

17. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x+6}dx$

18. $\int \frac{2x^2-12x+6}{(x^2-1)(x-1)}dx$

19. $\int \frac{3x-1}{x^2-2x-5}dx$

20. $\int \frac{5x^2-22x+8}{(x-1)(x^2-4)}dx$

21. $\int \frac{3x+2}{x^2+6x-12}dx$

22. $\int \frac{5x^2+11x-6}{(x^2-9)(x+3)}dx$

23. $\int \frac{2-3x}{x^2-10x-3}dx$

24. $\int \frac{x^3-4x^2+3x-2}{x^3(x+2)}dx$

25. $\int \frac{5-6x}{x^2+12x+11}dx$

26. $\int \frac{3x^2-5x-3}{x^3+x^2}dx$

27. $\int \frac{5x-2}{x^2+4x+21}dx$

28. $\int \frac{7x^2+6x+15}{(x+1)(x^2-9)}dx$

29. $\int \frac{11-9x}{x^2-16x-3}dx$

30. $\int \frac{x+77}{(x^2-x-6)(x+5)}dx$

**№4.** Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

2. $\int \frac{dx}{2\cos x + 4\sin x}$

3. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - \cos^2 x}$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x}$

5. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$

6. $\int \frac{dx}{5 - \cos x + 2\sin x}$

7. $\int \frac{dx}{7 - 2\sin^2 x}$

8. $\int \frac{dx}{3\cos x - 2\sin x + 1}$

9. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 7\cos^2 x}$

10. $\int \frac{dx}{5\cos x + 7\sin x - 9}$

11. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 5}$

12. $\int \frac{dx}{5 - 8\sin x - 2\cos x}$

13. $\int \frac{dx}{3\cos x - 8}$

14. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x}$

15. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin 2x}$

16. $\int \frac{dx}{3 + 2\cos x + 5\sin x}$

17. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin x \cos x}$

18. $\int \frac{dx}{2 - \sin x + 5\cos x}$

19. $\int \frac{dx}{6 + \cos^2 x}$

20. $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x}$

21. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x - 3\sin^2 x}$

22. $\int \frac{dx}{3 - 5\sin x}$

23. $\int \frac{dx}{5 + 6\cos x}$

24. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin x \cos x - \sin^2 x}$

25. $\int \frac{dx}{2\cos^3 x \sin x}$

26. $\int \frac{dx}{8\cos^2 x - \sin 2x - \sin^2 x}$

27. $\int \frac{dx}{2\sin 2x - 5\sin^2 x + 5}$

28. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 3\cos x \sin x}$

29. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x + 2}$

30. $\int \frac{dx}{2\sin x + 7}$

**№5.** Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{x+3}{x\sqrt{x-4}}dx$

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+5}}$

3. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{2x+10}$

4. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{3x+1}}$

5. $\int x\sqrt{5x+11}\,dx$

6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{5x-4}}$

7. $\int x\sqrt{2x+6}\,dx$

8. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[7]{3x-5}}$

9. $\int x\sqrt[3]{6x-2}\,dx$

10. $\int \frac{2x-5}{x\sqrt{x+1}}dx$

11. $\int \frac{\sqrt{3x+2}+\sqrt[3]{3x+2}}{\sqrt{3x+2}}dx$

12. $\int x\sqrt{4x-9}\,dx$

13. $\int \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}}dx$

14. $\int \frac{2+\sqrt[5]{1-2x}}{\sqrt[3]{1-2x}}dx$

15. $\int \frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}dx$

16. $\int \frac{5-\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt[6]{3x+1}}dx$

17. $\int \frac{\sqrt[3]{8x+3}-\sqrt{8x+3}}{\sqrt[4]{8x+3}}dx$

18. $\int \frac{\sqrt[7]{2x-5}+4}{\sqrt{2x-5}}dx$

19. $\int \frac{\sqrt[3]{7x+4}-\sqrt{7x+4}}{\sqrt[6]{7x+4}}dx$

20. $\int \frac{\sqrt[3]{9x+1}+\sqrt[6]{9x+1}}{\sqrt{9x+1}}dx$

21. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x+3}}$

22. $\int \frac{3-\sqrt{2x-1}}{\sqrt[5]{2x-1}}dx$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-9}+1}$

24. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-5}}$

25. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+7}}$

26. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9x-4}}$

27. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x-8}}$

28. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{5-4x}$

29. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2+5x}}$

30. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{10-7x}}$

**№6.** Вычислить определенный интеграл.

1. $\int_1^2 \frac{\ln(2x-1)}{(2x-1)^2}dx$

2. $\int_0^{1/4} (3x+2)e^{4x}\,dx$

3. $\int_1^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$

11. $\int_1^2 (x-2)\sin(2-x)\,dx$

12. $\int_{1/2}^1 (2x+5)\ln 2x\,dx$

13. $\int_{-1/5}^0 4x\cos(5x+2)\,dx$

21. $\int_0^{\pi/4} \frac{x\,dx}{\cos^2 4x}$

22. $\int_4^8 x\ln\frac{x}{8}dx$

23. $\int_0^{1/3} x\,e^{2-6x}\,dx$

4. $\int_{0}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$ 14. $\int_{-2}^{0} (2x+4)e^{2x+4}\,dx$ 24. $\int_{3}^{4} \ln\frac{5-x}{5+x}\,dx$

5. $\int_{\sqrt{3}/5}^{1} \mathrm{arcctg}\,5x\,dx$ 15. $\int_{0}^{\pi/2} (2x+3)\sin x\,dx$ 25. $\int_{0}^{5} 3x\,e^{x/5}\,dx$

6. $\int_{1}^{6} (1+3x)\ln\frac{1}{x}\,dx$ 16. $\int_{-1/9}^{0} (5-x)e^{-9x}\,dx$ 26. $\int_{1}^{4} \frac{\ln 5x}{\sqrt{x}}\,dx$

7. $\int_{0}^{1/4} \mathrm{arctg}\,4x\,dx$ 17. $\int_{-2}^{1} x^3\sin\left(x^2+4\right)dx$ 27. $\int_{\pi/18}^{\pi/9} \frac{x\,dx}{\sin^2 3x}$

8. $\int_{0}^{2} \ln(7-3x)\,dx$ 18. $\int_{0}^{1/2} \arcsin 2x\,dx$ 28. $\int_{-5/2}^{0} x\,e^{-\frac{2}{5}x}\,dx$

9. $\int_{0}^{1} x^3 e^{x^2}\,dx$ 19. $\int_{0}^{\pi} \frac{x}{2}\sin 2x\,dx$ 29. $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\ln x\,dx$

10. $\int_{1}^{9} \mathrm{arcctg}\sqrt{x}\,dx$ 20. $\int_{0}^{1/3} \arccos 3x\,dx$ 30. $\int_{0}^{\pi} x\cos\frac{x}{4}\,dx$

**№7.** Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

1. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{5\sin 3x}{\cos 3x}\,dx$ 11. $\int_{-\infty}^{0} \frac{2x+10}{\sqrt[7]{x^2+10x+26}}\,dx$ 21. $\int_{-1/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+4x}}$

2. $\int_{1}^{+\infty} \frac{20x\,dx}{25x^4-9}$ 12. $\int_{-5/2}^{0} \frac{\ln^3(2x+5)}{2x+5}\,dx$ 22. $\int_{0}^{+\infty} \frac{5+x^2}{x^2+7}\,dx$

3. $\int_{4/5}^{1} \frac{dx}{(5x-4)^2}$ 13. $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{5\,dx}{x\left(1+\ln^2 2x\right)}$ 23. $\int_{0}^{1} \frac{x^3dx}{1-x^4}$

4. $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-4x^3}\,dx$ 14. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\sqrt[5]{(1-\sin 2x)^3}}\,dx$ 24. $\int_{2}^{+\infty} \frac{9x\,dx}{16x^4-25}$

5. $\int_{3/4}^{1} \frac{dx}{(4x-3)^3}$ 15. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x-3}$ 25. $\int_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+3x}}$

6. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^4 \,e^{-2x^5}\, dx$
7. $\int\limits_{2/3}^{1} \frac{dx}{(3x-2)^4}$
8. $\int\limits_{1/5}^{+\infty} \frac{2\,dx}{x\left(1+\ln^2 5x\right)}$
9. $\int\limits_{-4/3}^{0} \frac{\ln^2(3x+4)}{3x+4}\,dx$
10. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^3 \,e^{-5x^4}\, dx$
16. $\int\limits_{-1/5}^{0} \frac{\ln^4(5x+1)}{5x+1}\,dx$
17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x-3}{x^2-6x+12}\,dx$
18. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[7]{(1-\sin x)^4}}\,dx$
19. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{2x+7}{\sqrt[5]{x^2+7x+13}}\,dx$
20. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x-3}{x^2-6x+5}\,dx$
26. $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx$
27. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{1-x^3}$
28. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x-7}$
29. $\int\limits_{-1/5}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+5x}}$
30. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{7+x^2}{x^2+5}\,dx$

**№8.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

1. $y = x^2+4x-3,\ y = 5x+3$
2. $y = x^2+4x-2,\ y = -x^2-2x+6$
3. $y = -x^2+6x+5,\ y = 4x+2$
4. $y = 2x^2-2x+5,\ y = x^2+x+9$
5. $y = x^2-2x+7,\ y = -5x+17$
6. $y = x^2+2x+3,\ y = -x^2+6x+9$
7. $y = -x^2+6x-9,\ y = -5x+1$
8. $y = 2x^2+3x+5,\ y = x^2-2x+1$
9. $y = x^2+8x+3,\ y = 3x-3$
10. $y = x^2-6x+7,\ y = x^2+4x-1$
11. $y = x^2-8x+2,\ y = -2x+9$
12. $y = x^2-9x+8,\ y = -x^2+9x-8$
13. $y = -x^2-2x+5,\ y = 2x-7$
14. $y = 2x^2+6x-8,\ y = x^2+5x+4$
15. $y = x^2+4x-5,\ y = 7x-7$
16. $y = 2x^2-2x-5,\ y = x^2+2x+7$
17. $y = -x^2+8x+9,\ y = 2x-7$
18. $y = 2x^2+2x-10,\ y = x^2-5x-2$
19. $y = x^2+6x+12,\ y = -3x-8$
20. $y = x^2+8x-9,\ y = -x^2+10x+15$
21. $y = x^2+6x-5,\ y = 5x+7$
22. $y = 2x^2+4x-3,\ y = x^2+2x+5$
23. $y = -x^2+2x+20,\ y = -x-8$
24. $y = -x^2+2x+8,\ y = x^2-4x-12$
25. $y = -x^2+6x+11,\ y = 5x-9$
26. $y = 2x^2+3x-12,\ y = x^2+2x+8$
27. $y = -x^2+6x-5,\ y = -3x+3$
28. $y = x^2+10x+25,\ y = -x^2-8x-15$
29. $y = x^2+10x-9,\ y = 4x-14$
30. $y = 2x^2+5x-3,\ y = x^2+2x+7$

## II. Практические задания по теме «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

**№1.** Найти частные производные второго порядка функции $z$.

1. $z = x^2y^4 + 2x^3y + 5x^2 + 7y^3 - 1$
2. $z = 3x^3y^4 + 2xy + 8x^2 - 2y^4 + 2$
3. $z = 4xy^3 - 5x^2y + 3x^3 - y^4 - 3$
4. $z = 2x^2y^2 - 5x^3y^4 - 2x + y^2 + 4$
5. $z = x^4y^5 - x^2y^3 + x^4 - 3y - 5$
6. $z = 3x^2y^4 - 4x^3y^3 + 2x^5 - y + 6$
7. $z = 4xy - 2x^4y^6 + 7x^5 + y^3 - 7$
8. $z = 5x^2y^3 - 8xy^2 + 9y - 2x^3 + 8$
9. $z = 3x^5y^2 - x^3y^2 + 2x - y^5 - 9$
10. $z = x^6y^7 + 2x^4y^5 + 2y^2 - 3x^2 + 10$
11. $z = x^8y^5 - 3x^5y + 2y^4 - 3x^3 - 11$
12. $z = x^4y^6 - 9xy - 5x^5 - 4y^4 + 12$
13. $z = 5xy^3 + 2x^2y^7 + 5x^4 + 2y^6 - 13$
14. $z = 6x^2y + 3xy^3 - 2y^5 + x^3 + 14$
15. $z = 3xy^2 - 4y^3x^2 + 5y^2 - 7x^4 - 15$
16. $z = 4y^4x^3 - 5y^3x^2 - 4x + 7y^3 + 16$
17. $z = 5y^3x^2 + 2y^3x^4 - x^3 + y^3 - 17$
18. $z = 3y^5x^3 - y^4x^6 + x^4 - 4y^4 + 18$
19. $z = y^5x^2 - y^3x^2 + 5x^5 - 2y^7 - 19$
20. $z = y^6x^7 - 4x^3y - 5x^2 + 3y^4 + 20$
21. $z = x^5y^5 - 3x^6y^8 + 2x^4 - 5y - 21$
22. $z = x^6y - 8x^2y^2 + 2x - 3y^3 + 22$
23. $z = x^5y^6 + 2x^4y^7 - x^4 + y^5 - 23$
24. $z = x^8y^9 - x^5y^2 + 3x + 2y^4 + 24$
25. $z = 3x^2y^4 - x^4y^2 + 2y^8 - 3x^4 - 25$
26. $z = 5xy^3 - 3y^2x^6 - 2x^6 + 4y^4 + 26$
27. $z = 8x^2y^3 + 2y^3x^9 - x^4 + 4y - 27$
28. $z = 9xy + x^4y^5 + 2x^6 - 3y^3 + 28$
29. $z = x^8y^2 - 3x^2y + 3x^4 + 4y^5 - 29$
30. $z = 4x^4y^4 - 8xy^2 + x^3 - 6y^2 + 30$

**№2.** Найти полный дифференциал функции $u$.

1. $u = \cos\left(x^2y + y^2\ln(zy)\right)$
2. $u = \sin\left(\dfrac{x^2z^y}{\ln(xz)}\right)$
3. $u = \operatorname{tg}\left(x^2\cos(yx) + 2z\right)$
4. $u = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{z^2x^y}{\sin(xz)}\right)$
5. $u = \arccos\left(2y^3\sin(zy) + x^2y\right)$

16. $u = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\sqrt{xy}\,\sin x^2}{z^3y}\right)$
17. $u = \operatorname{arcctg}\left(z\operatorname{tg}(z^3y) - xyz\right)$
18. $u = \operatorname{ctg}\left(z^2\ln(x^3z) - yx^3z\right)$
19. $u = \sin\left(z^2y + 7y\ln(yx)\right)$
20. $u = \cos\left(\dfrac{\sqrt{z}\operatorname{tg}(x^2z^3)}{y^4x^3}\right)$

6. $u=\arcsin\left(\dfrac{x^{4y}z}{\operatorname{tg}(xz)}\right)$

7. $u=\operatorname{arctg}\left(x^3\operatorname{ctg}(xy^2)-2zy^2\right)$

8. $u=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{\ln(x^3y)}{x^4z^3}\right)$

9. $u=\ln\left(zx^2\operatorname{tg}(xy)+2z^3\right)$

10. $u=\log_6\left(\dfrac{\cos(xz^y)}{3z^4x}\right)$

11. $u=\mathrm{e}^{\frac{x^3z-\sin(yx)}{xz^3}}$

12. $u=\operatorname{ch}\left(z\,\mathrm{e}^{x^3y^2}-zy\right)$

13. $u=\operatorname{sh}\left(\dfrac{y^2\ln(yz^2)}{xz}\right)$

14. $u=\operatorname{cth}\left(3z^2\,\mathrm{y}-x^3\sin(y^2x)\right)$

15. $u=\operatorname{th}\left(\dfrac{x^2\cos(5xy)}{z^3y^2}\right)$

21. $u=\arcsin\left(y\,\mathrm{e}^{2xy^4}+7xz^2\right)$

22. $u=\arccos\left(\dfrac{5^{x^2\sqrt{z}}-x^3y}{xz}\right)$

23. $u=\log_4\left(3z\,\mathrm{e}^{xz}+\sqrt{xy^3}\right)$

24. $u=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2\ln(xz^3)}{zy^4}\right)$

25. $u=\mathrm{e}^{2y\operatorname{sh}\left(\mathrm{xy}^2\right)-3zx^3}$

26. $u=\operatorname{cth}\left(\dfrac{z^3\log_3(y^2z)}{2x^2\,\mathrm{y}}\right)$

27. $u=\ln\left(\dfrac{4z^3\operatorname{ch}\sqrt{zx}}{3xy}\right)$

28. $u=\operatorname{th}\left(\sqrt[3]{z}\,\mathrm{e}^{xyz}-5x^3z^2\right)$

29. $u=\operatorname{ch}\left(\dfrac{6x^2y}{z\ln\left(xy^2\right)}\right)$

30. $u=\operatorname{sh}\left(y^2 4^{yz^2}+5\sqrt{xyz}\right)$

**№3.** Заданное уравнение определяет в некоторой окрестности точки $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ единственную неявную функцию вида $z=z(x;y)$. Вычислить значения ее частных производных в точке $\left(x_0;y_0\right)$.

1. $\sin^2x+\cos^2y+\sin y\cos z=4$, $A\left(0;\pi/2;\pi/2\right)$
2. $x^2y+3xyz+y^{3x}+\mathrm{z}\mathrm{y}=2$, $A\left(0;1;2\right)$
3. $\mathrm{e}^{xz}-2\cos y+yz^2+x=2$, $A\left(1;\pi/2;0\right)$
4. $\ln x+2x^2yz+\mathrm{e}^z+y^3=4$, $A\left(1;4;0\right)$
5. $x/y+z/x+y/z=6$, $A\left(1;-4;2\right)$
6. $z^2+\sqrt{x^2+y^2+8}=2$, $A\left(2;2;1\right)$

7. $x\sin y + y\cos z + z\cos x = 2$, $A(0;\pi/2;\pi)$

8. $x^y + z^y + z^x = 3$, $A(1;1;1)$

9. $\left(x^2 + y^2\right)^3 + z^4 - xyz = 2$, $A(3;1;1)$

10. $z\cos(xy) - y\sin(xz) + x\mathrm{e}^{yz} = 1$, $A(0;0;2)$

11. $\mathrm{e}^{xy-1} + \ln(xz) - x^2yz^3 = 4$, $A(1;1;-1)$

12. $\sqrt{xz + yz^2} - 3xy + 2z = 1$, $A(2;0;2)$

13. $x\ln(yz) - y^2\cos x + z\mathrm{e}^{xy} = 3$, $A(0;1;1)$

14. $z\cos x^y + x\cos y^z + y^x\cos z^2 = 2$, $A(1;1;0)$

15. $\left(xy + z^2\right)^3 - \sqrt{xyz} + \ln(xy) = 5$, $A(1;1;1)$

16. $\cos^2 y + \sin^2 z + \cos y \sin x = 3$, $A(0;0;\pi/4)$

17. $z^3x - 2xyz + yx + x^{2y} = 1$, $A(1;0;1)$

18. $\mathrm{e}^{yz} + 3\sin x + x^3y + z = 5$, $A(0;-2;0)$

19. $\ln z - 3xy^2z + \mathrm{e}^y + x^4 = 3$, $A(-1;0;2)$

20. $z/y + x/z + y/x = 2$, $A(-1;1;1)$

21. $z^3 - 3\sqrt{y^2 - x^2 - 4} = 3$, $A(2;3;1)$

22. $y\cos x + z\sin y + x\sin z = 1$, $A(0;\pi/2;\pi/2)$

23. $y^x + z^y + x^z = 5$, $A(1;1;1)$

24. $\left(y^3 - z^3\right)^2 + x^2yz + z^2 = 3$, $A(1;3;-2)$

25. $x\sin(yz) + z\cos(xy) - y\mathrm{e}^{xz} = 2$, $A(3;0;0)$

26. $\mathrm{e}^{yz+2} + \ln(xy) - xy^3z^2 = 2$, $A(1;1;-2)$

27. $2xz + 3y + \sqrt{yz + xy^2} = 2$, $A(0;3;3)$

28. $x^3\sin(yz) + y\ln(xz) + z\mathrm{e}^y = 4$, $A(1;0;1)$

29. $x\sin z^y + y\sin x^z + z^x\sin y = 3$, $A(1;1;1)$

30. $(yz - x)^2 - z\ln(xy) + \sqrt{xy} = 6$, $A(1;1;2)$

**№4.** Найти производную сложной функции $z = z(x;y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$.

1. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ x = \cos^2 t,\ y = \sin t$
2. $z = x/y - y/x,\ x = 1 + 2t,\ y = t^3$
3. $z = \left(x^2 + y - 2\right)^3,\ x = \ln(t+2),\ y = e^{2t}$
4. $z = \sqrt{x + 4y - 2},\ x = \sin 2t,\ y = \operatorname{tg} 3t$
5. $z = \arcsin\left(x^2 y\right),\ x = t^4 + 2t + 1,\ y = t^4$
6. $z = \ln\left(x^2 + y^3\right),\ x = e^{4t},\ y = \cos t$
7. $z = e^{2x - y^4},\ x = \operatorname{tg} 2t,\ y = t + 2$
8. $z = x^y,\ x = t^2 - 2t + 8,\ y = \operatorname{ctg} 5t$
9. $z = \operatorname{tg}\dfrac{4y}{x+3},\ x = t^4,\ y = \sin^2 t$
10. $z = \dfrac{x}{4y^3 - 2},\ x = t^3,\ y = t + 2$
11. $z = \ln\dfrac{y^3 - 2}{x},\ x = \cos 3t,\ y = 4\operatorname{tg} t$
12. $z = \left(\dfrac{y^2 + 4}{x^3}\right)^3,\ x = \operatorname{arctg} t,\ y = e^t$
13. $z = x^3 e^{2y},\ x = 1 - 2t,\ y = \sin 3t$
14. $z = \ln\left(e^{2x} - 2^y\right),\ x = \operatorname{tg} 4t,\ y = \cos^4 t$
15. $z = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2},\ x = \dfrac{1}{t},\ y = t^2 + 3$
16. $z = \operatorname{arcctg}\left(x/y\right),\ x = \sin t,\ y = \cos^3 t$
17. $z = y/x + x/y,\ x = t^3 - 3,\ y = 4t$
18. $z = \left(y^2 - x + 1\right)^2,\ x = e^{4-3t},\ y = \ln 2t$
19. $z = \sqrt[3]{x + y^2 + 3},\ x = \operatorname{ctg} 2t,\ y = \cos 3t$
20. $z = \arccos\left(xy^3\right),\ x = t^2 - 4,\ y = t^3 + 2$
21. $z = \ln\left(e^{3y} + e^x\right),\ x = \sin t,\ y = t^3$
22. $z = e^{\cos x - 3y^2},\ x = t^5,\ y = \sin t^3$
23. $z = y^x,\ x = e^{4t^3 - 3},\ y = \cos t^2$

24. $z = \text{ctg}\dfrac{2x+1}{3y}$, $x = \cos^2 t$, $y = t^2 + 1$

25. $z = \dfrac{2y}{1 - x^4}$, $x = \cos 3t$, $y = \text{e}^{2t}$

26. $z = \ln\left(x^2 / y^4\right)$, $x = \text{e}^{3t-1}$, $y = 1/t^2$

27. $z = \left(\dfrac{x^2 - 2}{3y^4}\right)^3$, $x = \arccos t$, $y = 2t - 1$

28. $z = y^2\,\text{e}^{3y}$, $x = \ln t$, $y = \cos 4t$

29. $z = \arccos\left(x^2 / 4y^3\right)$, $x = \ln 2t$, $y = 1 - t^2$

30. $z = \dfrac{1}{y^3 - 4x^4}$, $x = t^4$, $y = \sin^2 t$

**№5.** С помощью полного дифференциала вычислить приближённо данную величину (результат записать с двумя знаками после запятой).

1. $\sqrt{3{,}01^2 + 3{,}98^2}$
2. $\text{arctg}\left(\dfrac{2{,}01^2}{0{,}98} - 3\right)$
3. $3{,}01^2 \cdot 1{,}97^2 \cdot 0{,}98^3$
4. $\ln\dfrac{0{,}97^3}{3{,}01^2 - 8}$
5. $\dfrac{2{,}98^2 + 4{,}01^2}{5{,}02}$
6. $\sqrt{6{,}03^2 + 7{,}98^2}$
7. $\text{arctg}\left(\dfrac{1{,}97^3}{1{,}01^2} - 7\right)$
8. $2{,}01^4 \cdot 2{,}99^2 \cdot 1{,}02^3$
9. $\ln\dfrac{2{,}01^4}{2{,}98^2 + 7}$
10. $\dfrac{3{,}98^3 + 6{,}01^2}{4{,}97^2}$
16. $\dfrac{3{,}01^3}{5{,}08^2 - 1{,}98^4}$
17. $\sqrt[4]{5{,}02^2 - 2{,}97^2}$
18. $\text{arctg}\dfrac{0{,}98^2}{2{,}01^3 - 7}$
19. $3{,}97^2 \cdot 0{,}99^3 \cdot 1{,}98^2$
20. $\ln\left(\dfrac{1{,}97^2}{0{,}98^4} - 3\right)$
21. $\dfrac{5{,}02^2 - 1{,}98^4}{3{,}03^2}$
22. $\sqrt{8{,}03^2 + 6{,}98^2 + 8}$
23. $\text{arctg}\dfrac{2{,}03^5 + 4}{5{,}97^2}$
24. $4{,}98^2 \cdot 0{,}97^5 \cdot 2{,}01^2$
25. $\ln\dfrac{5{,}03^2 + 2}{2{,}98^3}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11. | $\sqrt{1{,}97^7 + 4{,}02^2}$ | 26. | $\dfrac{10{,}02^2}{2{,}03^6 + 5{,}99^2}$ |
| 12. | $\sqrt[4]{5{,}02^2 + 5{,}97^3 + 15}$ | 27. | $\operatorname{arctg}\dfrac{3{,}01^3 - 2}{4{,}98^2}$ |
| 13. | $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1{,}98^5}{4{,}03^2} - 1\right)$ | 28. | $0{,}97^4 \cdot 1{,}99^2 \cdot 2{,}03^3$ |
| 14. | $\ln\left(\dfrac{2{,}99^2}{1{,}03} - 8\right)$ | 29. | $1{,}98^3 \cdot 3{,}01^2 \cdot 0{,}97^4$ |
| 15. | $\dfrac{1{,}99^5 - 3{,}02^3}{5{,}01}$ | 30. | $\ln\dfrac{2{,}03^5 - 7}{4{,}98^2}$ |

**№6.** Вычислить производную функции $z$ в точке $M$ по направлению вектора $\vec{a}$.

1. $z = x^3y^2 + 3xy - 7x^4 - 4y^3,\ M(-1;1),\ \vec{a} = (8;15)$
2. $z = 2x^4y^5 + 2xy^2 + x^5 + y^4,\ M(-1;-1),\ \vec{a} = (3;-4)$
3. $z = 5x^2y^4 + 3x^2y - 8x + 9y^7,\ M(-3;-1),\ \vec{a} = (8;-6)$
4. $z = x^4y + 5x^3y^2 + 8x^2 - 2y^2,\ M(2;-1),\ \vec{a} = (12;9)$
5. $z = x^5y^6 + 8x^2y^3 - 5x^3 - 2y^4,\ M(1;-1),\ \vec{a} = (5;12)$
6. $z = 2x^4y^3 - 8xy^2 - x - 6y^2,\ M(1;-1),\ \vec{a} = (8;15)$
7. $z = x^3y^4 - 3xy^2 - 2x^8 + 5y^2,\ M(1;-2),\ \vec{a} = (3;4)$
8. $z = x^4y - 5xy^2 - 2x^3 - 3y^3,\ M(-2;-2),\ \vec{a} = (8;6)$
9. $z = 2xy^2 + 4x^2y - 3x^3 - 7y,\ M(-1;3),\ \vec{a} = (-9;-12)$
10. $z = xy^2 + x^3y + 7x + 4y,\ M(3;-3),\ \vec{a} = (5;-12)$
11. $z = 2x^3y^2 - 5xy - x^3 - 2y^4,\ M(2;-1),\ \vec{a} = (15;8)$
12. $z = 4xy^2 + x^4y^3 - 4x + 2y^3,\ M(-1;2),\ \vec{a} = (4;3)$
13. $z = 2x^2y^3 + 4xy + 2x^2 - 7y^3,\ M(2;2),\ \vec{a} = (6;-8)$
14. $z = 4x^2y^3 - 6x^4y + 7x^2 + 3y,\ M(-1;2),\ \vec{a} = (12;9)$
15. $z = 7x^2y - 3x^4y^2 - 3x^2 - 2y^2,\ M(-1;2),\ \vec{a} = (12;5)$
16. $z = 4x^2y^2 + x^4y^2 + x^3 + 3y,\ M(1;-2),\ \vec{a} = (8;15)$
17. $z = x^2y^4 + 3xy^3 + x^3 - 2y^2,\ M(3;-1),\ \vec{a} = (-3;4)$
18. $z = x^2y - 2x^5y^6 - 2x^4 + 7y,\ M(1;-1),\ \vec{a} = (-6;-8)$

19. $z = x^4y^2 + 2x^5y - 7x^3 - 11y,\ M(1;-3),\ \vec{a} = (-9;12)$

20. $z = 2x^4y^3 - 6x^2y + 4x^3 + 2y^2,\ M(1;2),\ \vec{a} = (-5;12)$

21. $z = x^5y^3 - 2xy^2 - 7x^2 + 4y^4,\ M(-1;1),\ \vec{a} = (-15;8)$

22. $z = 3x^2y^2 + x^3y - 5x^4 - 7y^2,\ M(1;-3),\ \vec{a} = (-4;3)$

23. $z = 5xy - x^2y^3 + 2x^2 - 7y,\ M(3;-2),\ \vec{a} = (-8;-6)$

24. $z = 6x^2y^3 - 7x^3y^2 + x^3 + 4y^7,\ M(-1;1),\ \vec{a} = (12;9)$

25. $z = 2x^2y^4 - 3xy^5 + 5x^2 + 5y^5,\ M(3;1),\ \vec{a} = (-12;-5)$

26. $z = 2x^3y^4 + 2x^2y + 2x - 2y^2,\ M(2;1),\ \vec{a} = (15;-8)$

27. $z = x^5y^3 + 4x^2y - 4x^3 + 6y^2,\ M(1;-1),\ \vec{a} = (-3;4)$

28. $z = x^3y^5 - 2xy^2 + 3x^5 - y,\ M(-1;-1),\ \vec{a} = (-6;8)$

29. $z = 3x^5y^2 + 2x^3y^4 - 6x + 4y^2,\ M(-1;-2),\ \vec{a} = (9;12)$

30. $z = 6x^4y^4 - 3xy^3 + 3x^4 + 2y^3,\ M(-1;1),\ \vec{a} = (5;12)$

**№7.** Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S$, заданной уравнением, в точке $M$.

1. $xz^2 \operatorname{arctg} y - 4x^2z = 5,\ M(1;0;-2)$
2. $z = \cos(xy) - y\ln^2 x,\ M\left(1;\pi/2;-2\right)$
3. $y^2\ln(xz) + z\sin(xy) = 1,\ M(-1;0;-1)$
4. $z = x\operatorname{tg} y + x^3\cos y,\ M(-2;0;-1)$
5. $x\operatorname{arctg} y - z\mathrm{e}^{x^2y} = 7,\ M(3;0;-2)$
6. $z = x\operatorname{arctg} y + y\ln x^2,\ M(1;0;3)$
7. $yz^2\sin x + x\ln(yz) = 6,\ M\left(\pi/2;1;1\right)$
8. $z = x\cos^3 y - \mathrm{e}^{4xy},\ M(-2;0;2)$
9. $x\cos(yz) + y^2z\ln x = 3,\ M(1;1;\pi)$
10. $z = \operatorname{tg}\left(x^2y\right) + y\ln x,\ M(-1;0;4)$
11. $xy\sin^3 z - x^2y\,\mathrm{e}^z = 2,\ M(-1;3;0)$
12. $z = \ln(xy) - x\sin^2 y,\ M\left(\pi;-\pi;1/\pi\right)$
13. $z\mathrm{e}^{xy} - yz\cos x = 4,\ M(0;3;-2)$
14. $z = -\sin(xy) - y^2\mathrm{e}^{2x},\ M(0;2;3)$
15. $xz\operatorname{tg} y + x^2z = -1,\ M\left(-2;\pi/4;1\right)$
16. $z = \mathrm{e}^{y\sin x} - 3xy,\ M(0;5;-2)$
17. $x^{yz} + 2 = xy\,\mathrm{e}^z,\ M(1;4;0)$
18. $z = y^x + y^2\sin x,\ M(0;1;-3)$
19. $x^y + y\,\mathrm{e}^{xz} = -3,\ M(1;3;0)$
20. $z = y\operatorname{arctg} x + y^{3x},\ M(0;1;-5)$
21. $x^3\ln z + 4 = z^{xy},\ M(-1;0;\mathrm{e})$
22. $z = \mathrm{e}^{xy} - y\cos^2 x,\ M(0;-3;5)$
23. $x\operatorname{tg} z + 5 = y^2\ln x,\ M(1;-2;0)$
24. $z = \operatorname{arctg}(xy) - x^y,\ M(1;3;-1)$
25. $yz\mathrm{e}^x - z^2\ln y = 1,\ M(0;1;-3)$
26. $z = y\ln^4 x - x^2\mathrm{e}^y,\ M(1;0;-3)$
27. $yz\mathrm{e}^{\sin x} zy^3 = -3,\ M(0;-1;2)$
28. $z = y^3\ln x^2 - x\mathrm{e}^y,\ M(-1;0;4)$
29. $xz^y + xy\ln z = 2,\ M(2;0;\mathrm{e})$
30. $z = 7^{x^2+3y} + x^3y^2,\ M(1;0;-2)$

**№8.** Исследовать функцию $z$ на локальный экстремум.

1. $z = 2x^3 + 42xy + 21y^2 - 24x - 84y + 60$
2. $z = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 18x - 30y - 93$
3. $z = 2x^3 + 6xy - 3y^2 - 12x - 24y - 126$
4. $z = 2x^3 - 30xy + 15y^2 + 6x + 30y - 8$
5. $z = 2x^3 + 18xy - 9y^2 - 60x + 36y - 143$
6. $z = 4x^3 + 12xy - 3y^2 - 36x - 30y - 389$
7. $z = x^3 + 6xy - y^2 - 30x + 18y - 58$
8. $z = 2y^3 - 12xy + 3x^2 - 18y + 18x + 35$
9. $z = 8y^3 - 24xy - 168y + 3x^2 + 60x + 309$
10. $z = 2x^3 - 30xy + 15y^2 - 24x + 60y + 43$
11. $z = 8x^3 + 24xy - 3y^2 - 120x + 48y - 181$
12. $z = 2x^3 + 12xy - 3y^2 - 18x + 18y - 15$
13. $z = 4x^3 + 36xy - 9y^2 - 84x + 90y - 148$
14. $z = x^3 + 18xy - 9y^2 - 12x + 36y - 6$
15. $z = 2y^3 - 18xy - 6y + 9x^2 + 18x - 25$
16. $z = 2y^3 - 6xy - 18y + x^2 + 10x + 37$
17. $z = 4y^3 + 36xy - 120y - 9x^2 + 90x - 308$
18. $z = x^3 + 6xy - y^2 - 6x + 10y + 9$
19. $z = 4x^3 + 12xy - 3y^2 - 108x + 6y - 304$
20. $z = 2x^3 + 18xy - 9y^2 - 96x + 72y - 236$
21. $z = 2y^3 - 6xy - 6y + 3x^2 - 30x + 177$
22. $z = 4y^3 + 36xy - 9x^2 + 24y + 36x + 66$
23. $z = 2y^3 + 30xy - 15x^2 - 6y + 30x - 8$
24. $z = 10y^3 + 30xy - 3x^2 + 72x - 240y - 488$
25. $z = 2y^3 - 6xy + 3x^2 - 24y - 12x + 118$
26. $z = 2y^3 - 12xy + 3x^2 + 24x - 30y + 74$
27. $z = 2y^3 - 30xy - 36y - 15x^2 - 60x - 49$
28. $z = 2y^3 - 6xy + 3x^2 - 12y - 24x + 157$
29. $z = y^3 + 6xy - x^2 + 30y - 2x + 44$
30. $z = 2y^3 - 6xy + 3x^2 - 54y + 18x + 138$

## III. Практические задания по теме «Дифференциальные уравнения»

**№1.** Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1. $y' = 5^{x^2+y} \cdot 4x$
2. $xy' = 2 - y$
3. $\operatorname{tg} x \cos y\, y' = \operatorname{ctg} y \sin x$
4. $3xy' + y^2 = 2$
5. $\left(5 + x^2\right)y' - x^2 y = 0$
6. $y'\sqrt{x^2+9} = e^{4y}$
7. $y' \ln x = \dfrac{y^2}{x}$
8. $y^2 + x^{-1}y^2 = y'$
9. $x^2 yy' = x^2 + 4$
10. $\sqrt{1-x^2}\, y' = \dfrac{\arcsin x}{4^y}$
11. $e^x y^3 y' = 1 + e^{2x}$
12. $\sin y \cos^2 x\, y' = 2\sin^2 y$
13. $5^{x-y} y' = 8$
14. $y' = (9 - 2x) \cdot \operatorname{tg} y$
15. $\left(5 + y^2\right)^3 y' = \dfrac{e^{2x}}{y}$
16. $\left(y + x^2 y\right)dy = \left(1 + y^2\right)dx$
17. $\sin x\, dy = (y \cos x + 2\cos x)\, dx$
18. $e^{2x} \cos y\, dx + \operatorname{tg} y\, dy = 0$
19. $\sqrt{1-x^2}\,dy - x\cos^2 y\, dx = 0$
20. $\left(y^2 + 5\right)dx = x^4 y^2\, dy$
21. $\left(x^2 + 9\right) y\, dx = x\left(y^2 - 4\right)dy$
22. $\sqrt{1-y^2}\operatorname{arctg} x\, dx = \left(1 + x^2\right)dy$
23. $e^{x^2+4y}\, dy = x\, dx$
24. $\cos x\, dy = y \ln^3 y\, dx$
25. $\dfrac{dy}{7^{x^2}} = x\sqrt{2+y^2}\, dx$
26. $\cos y \cos^2 x\, dy = \sin^2 y \sin x\, dx$
27. $\left(x^2 y + x^2\right)dx + y\, dy = 0$
28. $(2x - 3)dy - 2xy\, dx = 0$
29. $\sqrt{y^2-4}\, dx + y\left(x^2 + 6\right)dy = 0$
30. $\left(y^2 + y\right)x\, dx + \left(x^2 - 1\right)y\, dy = 0$

**№2.** Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 - y^2}\,dx$
2. $(4x + y)dx - x\,dy = 0$
3. $\left(x^2 + yx\right)dy - 2xy\,dx = 0$
4. $\left(x^2 - y^2\right)dx - 3xy\,dy = 0$
5. $x\,dy - y\,dx = x\cos\dfrac{y}{x}dx$
16. $y' = y/x + 5e^{y/x}$
17. $x^2 y' + xyy' = x^2 - xy$
18. $y^2 - xy = \left(3x^2 + xy\right)y'$
19. $xy' = \sqrt{y^2 + x^2} + y$
20. $y'x - y = x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

6. $2x^2dx - x^2dy = 3xy\,dx$

7. $y\,dx - x\,dy = x \cdot e^{y/x}\,dx$

8. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 - xy}\,dx$

9. $y\,dx - x\,dy = y\ln\dfrac{y}{x}dx$

10. $\left(yx + y^2\right)dx - x^2dy = 0$

11. $\left(y - 4\sqrt{xy}\right)dx - x\,dy = 0$

12. $x\,dy - y\,dx = x\cos^2\dfrac{y}{x}dx$

13. $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$

14. $xy\,dy - 4x^2dx = y^2dx$

15. $y^2dx - x^2dy = 5xy\,dx$

21. $y'x - 6\sqrt{xy} = y$

22. $x\left(y' - \sin\dfrac{y}{x}\right) = y$

23. $y'x - \sqrt{x^2 + y^2} = y$

24. $y'x^2 + y^2y' = xy$

25. $x + 5y = xy'$

26. $4x^2y + 3y^3 = 4x^3y'$

27. $y'x = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$

28. $y'x - \sqrt{x^2 - yx} = y$

29. $y'x + 4y' = y$

30. $x^2\left(y' + 1\right) = yx\left(1 - y'\right)$

**№3.** Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

1. $\left(x^2 - 4\right)y' + 2xy = 3,\ \ y(3) = -2$
2. $xy' + 2y = e^x x^3y^2,\ \ y(1) = -1/e$
3. $y' - 2xy - 5e^{x^2} = 0,\ \ y(0) = 7$
4. $y' + 2xy = e^{x^2} xy^2,\ \ y(0) = -1$
5. $xy' + 4xy = e^{-4x},\ \ y(1) = 1/e^4$
6. $y' - y\cos x = \dfrac{y^2\,\mathrm{tg}\,x}{e^{\sin x}},\ \ y(0) = 1$
7. $\left(x^2 + 1\right)y' + xy = x\sqrt{x^2 + 1},\ \ y(0) = 0$
8. $x^2yy' + xy^2 = \cos 2x,\ \ y(\pi) = 4/\pi$
9. $x^2y' + xy = x^3 + x^2,\ \ y(1) = 5/6$
10. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = y^4\cos x,\ \ y(0) = -1/3$
11. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{1}{\sin x},\ \ y(\pi/2) = 3$
12. $xy' + y = xy^3\sin\dfrac{1}{x},\ \ y(1/\pi) = \pi$
13. $xy' - y = x^2\cos x,\ \ y(0) = 5$
14. $y' - xy = 2xy^2 e^{x^2/2},\ \ y(0) = 1/2$

15. $(x-2)y' + y = x^2 - x^4,\ \ y(-1) = -13/15$
16. $xy' + 3y = y^2 x^3 \ln x,\ \ y(1) = -2$
17. $xy' - y = x \ln x,\ \ y(1) = 4$
18. $y' - y = \dfrac{5y^2}{e^x \cos^2 5x},\ \ y(0) = -1$
19. $y' - y = e^x(\sin x + 4),\ \ y(0) = 0$
20. $y' + y \sin x = \sqrt{e^{\cos x}\, y},\ \ y(0) = e$
21. $\sqrt{9 - x^2}\left(y' + y\right) = e^{-x},\ \ y(0) = 1$
22. $y' + 4y = -\dfrac{6 e^{4x} y^2}{\sin^2 6x},\ \ y(\pi/12) = e^{-\pi/3}$
23. $y' + 7y = \dfrac{e^{-7x}}{\cos^2 x},\ \ y(0) = 5$
24. $y' + y = y^2 \sin\left(e^{-x}\right),\ \ y(0) = -1/\cos 1$
25. $xy' - (x+5)y = 5e^x \cdot x^5,\ \ y(1) = e$
26. $xy' - 4y = 5xy^2 \cos(x^5),\ \ y(1) = -1/\sin 1$
27. $y' + y \operatorname{tg} x = 3 \sin x,\ \ y(0) = 0$
28. $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(x^2 + x^4\right)y^2,\ \ y(0) = 1$
29. $y' + 2xy = \dfrac{7x}{e^{x^2}},\ \ y(0) = 2$
30. $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, y = \dfrac{y^2}{e^{\arcsin x}},\ \ y(0) = 1$

**№4.** Найти частное решение дифференциального уравнения.

1. $y''' = 18 \sin 3x,\ \ y(\pi/6) = \pi/3,\ \ y'(\pi/6) = 0,\ \ y''(\pi/6) = 0$
2. $y''' = 2\cos\dfrac{x}{3},\ \ y(6\pi) = 30\pi,\ \ y'(6\pi) = -12,\ \ y''(6\pi) = 0$
3. $y''' = \dfrac{1}{x^3},\ \ y(1) = 1/2,\ \ y'(1) = 3/2,\ \ y''(1) = 1/2$
4. $y''' = e^{x/2},\ \ y(0) = 8,\ \ y'(0) = 5,\ \ y''(0) = 3$
5. $y''' = \cos 3x + 1,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 8/9,\ \ y''(0) = 0$
6. $y''' = \sin 2x - 2,\ \ y(0) = 1/8,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 1/2$
7. $y'' = \dfrac{1}{1 + x^2},\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = 0$

8. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$

9. $y'' = \dfrac{1}{x}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 3$

10. $y'' = \sin^2 x \cdot \cos x$, $y(\pi) = -7/9$, $y'(\pi) = 0$

11. $y'' = 3\cos^2 x \cdot \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

12. $y''' = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1/2$

13. $y''' = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$, $y(\pi/2) = \pi$, $y'(\pi/2) = 2$, $y''(\pi/2) = -1/2$

14. $y''' = \cos\dfrac{x}{2} + \mathrm{e}^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 1$

15. $y'' = \dfrac{1}{1+4x^2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

16. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$, $y(0) = 1/9$, $y'(0) = 0$

17. $y'' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$

18. $y'' = 6x + \sin^3 x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2/3$

19. $y''' = 8\mathrm{e}^{2x} - 4\cos^2 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/2$, $y''(0) = 4$

20. $y'' = 3\cos^3 x - \mathrm{e}^{x/5}$, $y(0) = -1/3$, $y'(0) = -5$

21. $y''' = 24\sin^2 x - 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 2$

22. $y'' = 4\sin^4 x$, $y(0) = -17/32$, $y'(0) = 0$

23. $y'' = 8\cos^4 x$, $y(0) = -1/16$, $y'(0) = 2$

24. $y'' = 5\sin^4 x \cdot \cos x$, $y(\pi/2) = 3$, $y'(\pi/2) = 1$

25. $y'' = 7\cos^6 x \cdot \sin x$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = 1$

26. $y'' = 12x^2 - \dfrac{3}{4\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 5/2$

27. $y''' = 2\mathrm{e}^{x} + \cos 3x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -1/9$, $y''(0) = 3$

28. $y''' = -\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$, $y(\pi/2) = -\pi^2/8$, $y'(\pi/2) = -\pi/2$, $y''(\pi/2) = 0$

29. $y''' = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

30. $y'' = \dfrac{1}{1+x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

**№5.** Найти частное решение дифференциального уравнения.

1. $y'' - 10y' + 25y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 8$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = -7$
3. $y'' - 4y' + 5y = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 4$
4. $y'' + 6y' + 9y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = -5$
5. $y'' + 2y' - 3y = 0,\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = -8$
6. $y'' + 9y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 9$
7. $y'' - 2y' + y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1$
8. $y'' - 9y' + 20y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 5$
9. $y'' + 4y' + 8y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$
10. $y'' - 8y' + 16y = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 12$
11. $y'' - 10y' + 21y = 0,\ \ y(0) = -3,\ \ y'(0) = -5$
12. $y'' + 6y' + 10y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -2$
13. $y'' + 12y' + 36y = 0,\ \ y(0) = -4,\ \ y'(0) = 14$
14. $y'' - 49y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 7$
15. $y'' + 12y' + 37y = 0,\ \ y(0) = -2,\ \ y'(0) = 4$
16. $4y'' - 4y' + y = 0,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 1/2$
17. $y'' - 2y' = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 4$
18. $y'' - 4y' + 13y = 0,\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = 5$
19. $9y'' - 6y' + y = 0,\ \ y(0) = -3,\ \ y'(0) = 0$
20. $2y'' + 3y' + y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0$
21. $y'' - 2y' + 10y = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = -1$
22. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ \ y(0) = 6,\ \ y'(0) = 10$
23. $y'' + y' - 6y = 0,\ \ y(0) = 8,\ \ y'(0) = 1$
24. $y'' + 16y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 8$
25. $9y'' - 12y' + 4y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 6$
26. $2y'' + 5y' - 3y = 0,\ \ y(0) = 9,\ \ y'(0) = 1$
27. $y'' + 4y' + 20y = 0,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 6$
28. $y'' + 14y' + 49y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -5$
29. $y'' - 10y' + 16y = 0,\ \ y(0) = -4,\ \ y'(0) = 4$
30. $y'' + 2y' + 17y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 9$

**№6.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' - 2y' = 4e^{2x}$
2. $y'' - 2y' + 5y = 100e^{2x}\sin 5x$
3. $y'' + 8y' + 16y = 6e^{-4x}$
4. $y'' + 6y' - 7y = (16x + 10)e^{x}$
5. $y'' + y = 4\cos x + 2\sin x$
6. $y'' + 10y' + 25y = (16x - 8)e^{-x}$
7. $y'' - 3y' - 4y = -150e^{5x}\cos 3x$
8. $y'' + 4y = -17e^{-x}\cos 2x$
9. $y'' + 4y' + 4y = 27x^2 e^{x}$
10. $y'' - 5y' = 6x^2 - 4x - 9$
11. $y'' + 49y = 14\sin 7x$
12. $25y'' + 40y' + 16y = 100e^{-4x/5}$
13. $y'' - 25y = 1500x^2 e^{5x}$
14. $y'' - 2y' + 2y = (34x + 1)e^{-3x}$
15. $y'' - 16y' + 64y = 578e^{3x}\sin 3x$
16. $y'' - 8y' + 15y = 15x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 5x + 11$
17. $y'' - 10y' + 29y = \left(13x^2 + x + 22\right)e^{2x}$
18. $9y'' + 12y' + 4y = 4\cos 4x - 468\sin 4x$
19. $y'' + 7y' + 10y = (130x + 24)\cos x$
20. $y'' + 36y = (27x + 54)\sin 3x + 33\cos 3x$
21. $y'' - 14y' + 49y = \left(12x^2 - 6x + 2\right)e^{7x}$
22. $y'' - 7y' + 6y = -3\cos 5x + 89\sin 5x$
23. $y'' - 8y' + 25y = -32\cos 4x + 9\sin 4x$
24. $4y'' + 4y' + y = x^4 + 17x^3 + 58x^2 + 14x + 14$
25. $y'' + 7y' + 12y = 65\sin 2x$
26. $y'' - 8y' + 41y = 41x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 41$
27. $y'' - 6y' + 9y = (169x + 182)\sin 2x$
28. $y'' - 4y' = 24x^5 - 150x^4 - 8x^3$
29. $y'' - 12y' + 37y = 37x^3 + x^2 - 18x + 39$
30. $y'' - 12y' + 36y = -676e^{2x}\cos 6x$

**№7.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' + 10y' + 29y = \dfrac{1}{e^{5x}\sin 2x}$
2. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$
3. $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 4}$
4. $y'' + 36y = \mathrm{tg}\, 6x$
5. $y'' - 10y' + 25y = e^{-5x} + \dfrac{e^{5x}}{x}$
6. $y'' + y' = e^{x}\sin(e^{x})$
7. $y'' - 4y' + 8y = \dfrac{e^{2x}}{\sin^2 2x}$
8. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{1}{x^5 e^{2x}}$
9. $y'' - 4y = \dfrac{e^{4x}}{e^{4x} - 16}$
16. $y'' + 49y = \dfrac{1}{\sin 7x}$
17. $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{x^4 e^{x}}$
18. $y'' - 5y' + 6y = \dfrac{e^{4x}}{e^{2x} - 9}$
19. $y'' + 64y = \mathrm{ctg}\, 8x$
20. $y'' - 16y' + 64y = \dfrac{e^{8x}}{x^5} + e^{8x}$
21. $y'' - 5y' = e^{-5x}\cos(e^{-5x})$
22. $y'' + 9y = \dfrac{5}{\cos^2 3x}$
23. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$
24. $y'' + 7y' + 12y = \dfrac{e^{x}}{e^{2x} + 1}$

10. $y'' + 25y = \dfrac{1}{\cos 5x}$

11. $y'' - 14y' + 49y = \dfrac{e^{7x}}{x^7} + e^{7x}$

12. $y'' + y' - 20y = \dfrac{\sin x + 2}{e^{5x}}$

13. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin^2 2x}$

14. $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{1}{x^3 e^{3x}}$

15. $y'' - 3y' = \dfrac{e^{4x}}{e^{2x} + 4}$

25. $y'' - 6y' + 18y = \dfrac{e^{3x}}{\cos^2 3x}$

26. $y'' + 12y' + 36y = e^{6x} + \dfrac{1}{x e^{6x}}$

27. $y'' - y' - 2y = e^{2x}(\cos x + 1)$

28. $y'' + 10y' + 29y = \dfrac{1}{e^{5x} \cos 2x}$

29. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^8}$

30. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{\sin 5x}{e^x} + e^x$

**№8.** Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} x' = -3x + 5y \\ y' = 6x - 2y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = x - 4y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -8x - 11y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 6x - 5y \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = 5x + 3y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = -8x + y \\ y' = 11x + 2y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 5x - 9y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = -x + 7y \\ y' = x + 5y \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = -4x + 6y \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = -10x + 6y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = x - 4y \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = -9x + 4y \\ y' = -9x + 6y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = -2x + 5y \\ y' = 4x - y \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = 2x - 6y \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = -10x - 6y \\ y' = 5x + y \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = 2x - 7y \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = -6x + y \\ y' = -7x + 2y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = -x + 4y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = -9x - 5y \\ y' = 8x + 5y \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 8x + 3y \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = 5x + 2y \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = -5x + 3y \\ y' = -8x + 9y \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = -4x + 11y \\ y' = -x + 8y \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = -6x - 13y \\ y' = 3x + 10y \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 5x + 6y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 7x + 6y \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = 6x + 7y \end{cases}$

## IV. Решение практических заданий по теме «Интегральное исчисление функций одной переменной»

**№1.** Найти неопределенный интеграл $\int \frac{7x^3+\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt{x}}dx$.

***Решение*.**

Представив корни в виде степеней, разделим числитель на знаменатель и воспользуемся свойством линейности неопределённого интеграла:

$$\int \frac{7x^3+\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{7x^3+x^{2/3}-1}{x^{1/2}}dx=\int\left(7x^{5/2}+x^{1/6}-x^{-1/2}\right)dx=7\int x^{5/2}dx+$$

$$+\int x^{1/6}dx-\int x^{-1/2}dx=7\frac{x^{5/2+1}}{5/2+1}+\frac{x^{1/6+1}}{1/6+1}-\frac{x^{-1/2+1}}{x^{-1/2}+1}=2\sqrt{x^7}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-2\sqrt{x}+C.$$

***Ответ*:** $2\sqrt{x^7}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-2\sqrt{x}+C,\ C=const$.

**№2.** Найти неопределенный интеграл $\int \frac{4dx}{\sqrt{9-64x^2}}$.

***Решение*.**

Учитывая, что $d(8x)=(8x)'dx=8dx$, получим:

$$\int \frac{4dx}{\sqrt{9-64x^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{8dx}{\sqrt{3^2-(8x)^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{d(8x)}{\sqrt{3^2-(8x)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x}{3}+C.$$

***Ответ*:** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x}{3}+C,\ C=const$.

**№3.** Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2-5x+40}{\left(x^2-2x+10\right)(x+2)}dx.$

***Решение*.**

Так как подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, представим её в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2-5x+40}{\left(x^2-2x+10\right)(x+2)}=\frac{Ax+B}{x^2-2x+10}+\frac{C}{x+2}=\frac{(Ax+B)(x+2)+C\left(x^2-2x+10\right)}{\left(x^2-2x+10\right)(x+2)},$$

откуда $(Ax+B)(x+2)+C\left(x^2-2x+10\right)=x^2-5x+40$.

Для нахождения коэффициента $C$ воспользуемся методом частных значений:

$$x=-2:\ (-2A+B)(-2+2)+C\left((-2)^2-2(-2)+10\right)=(-2)^2-5(-2)+40;$$

$$18\cdot C=54;$$

$$C=3.$$

Для нахождения коэффициентов $A$ и $B$ воспользуемся методом сравнения коэффициентов:

$$\begin{aligned}&x^2:\ A+C=1,\\&x^1:\ 2A+B-2C=-5,\end{aligned}\quad \text{откуда}\quad \begin{cases}A=-2,\\B=5.\end{cases}$$

Таким образом, $\displaystyle\int\frac{x^2-5x+40}{\left(x^2-2x+10\right)(x+2)}dx=\int\left(\frac{-2x+5}{x^2-2x+10}+\frac{3}{x+2}\right)dx=$

$$=\int\frac{-2x+5}{x^2-2x+10}dx+\int\frac{3}{x+2}dx=\left[\begin{array}{l}d\left(x^2-2x+10\right)=(2x-2)dx\\x^2-2x+10=(x-1)^2+9\end{array}\right]=\int\frac{-(2x-2)+3}{x^2-2x+10}dx+$$

$$+\int\frac{3}{x+2}dx=-\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+10}+\int\frac{3dx}{(x-1)^2+9}+3\int\frac{dx}{x+2}=-\int\frac{d\left(x^2-2x+10\right)}{x^2-2x+10}+$$

$$+3\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+9}+3\int\frac{d(x+2)}{x+2}=-\ln\left|x^2-2x+10\right|+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+3\ln|x+2|+C.$$

***Ответ***: $-\ln\left|x^2-2x+10\right|+\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{3}+3\ln|x+2|+C,\ C=const.$

**№4.** Найти неопределенный интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$.

***Решение.***

Приведём данный интеграл к интегралу от рациональной функции с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$\int\frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}=\left[\begin{array}{l}t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\ \ x=\operatorname{arctg}t,\\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{2\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+3}=$$

$$=\int\frac{2dt}{4t+3-3t^2+3+3t^2}=\int\frac{2dt}{4t+6}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2t+3)}{2t+3}=\frac{1}{2}\ln|2t+3|=\frac{1}{2}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C.$$

***Ответ***: $\dfrac{1}{2}\ln\left|2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+3\right|+C,\ C=const.$

**№5.** Найти неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx$.

***Решение***.

Так как *НОК* $(2,3)=6$, то

$$\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx=\begin{bmatrix} 3x+1=t^6,\ x=\dfrac{t^6-1}{3}, \\ t=\sqrt[6]{3x+1},\ dx=2t^5dt \end{bmatrix}=\int \frac{t^3-1}{t^2+t^3}\cdot 2t^5dt=2\int \frac{t^6-t^3}{1+t}dt.$$

Разделим $t^6-t^3$ на $t+1$ «уголком»:

$$\begin{array}{r|l}
t^6-t^3 & t+1 \\ \cline{2-2}
-\underline{t^6+t^5} & t^5-t^4+t^3-2t^2+2t-2 \\
-t^5-t^3 & \\
-\underline{-t^5-t^4} & \\
t^4-t^3 & \\
-\underline{t^4+t^3} & \\
-2t^3 & \\
-\underline{-2t^3-2t^2} & \\
2t^2 & \\
-\underline{-2t^2+2t} & \\
-2t & \\
-\underline{-2t-2} & \\
2 &
\end{array}$$

Тогда $t^6-t^3=\left(t^5-t^4+t^3-2t^2+2t-2\right)(t+1)+2$, откуда

$$\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx=2\int \frac{\left(t^5-t^4+t^3-2t^2+2t-2\right)(t+1)+2}{1+t}dt=$$

$$=2\int\left(t^5-t^4+t^3-2t^2+2t-2\right)dt+4\int\frac{dt}{t+1}=2\left(\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}-2\frac{t^3}{3}+t^2-2t\right)+$$

$$+4\ln\left|t+1\right|=\begin{bmatrix}\text{делаем обратную}\\ \text{подстановку}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}(3x+1)-\frac{2}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}-$$

$$-\frac{4}{3}\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}-4\sqrt[6]{3x+1}+4\ln\left|\sqrt[6]{3x+1}+1\right|+\mathrm{C}.$$

***Ответ***: $\frac{1}{3}(3x+1)-\frac{2}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\frac{4}{3}\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}-$

$-4\sqrt[6]{3x+1}+4\ln\left|\sqrt[6]{3x+1}+1\right|+C,\ C=const.$

**№6.** Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi}(x+2)\cos\frac{x}{2}dx$.

***Решение.***
Применим метод интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^{\pi}(x+2)\cos\frac{x}{2}dx=\left[\begin{array}{ll} u=x+2, & du=dx, \\ dv=\cos\frac{x}{2}dx, & v=2\sin\frac{x}{2} \end{array}\right]=(x+2)\cdot 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\int\limits_0^{\pi}2\sin\frac{x}{2}dx=(\pi+2)\cdot 2\sin\frac{\pi}{2}-(0+2)\cdot 2\sin\frac{0}{2}-4\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=$$

$$=2\pi+4+4\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=2\pi+4+4\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{0}{2}\right)=2\pi+4+4(0-1)=2\pi.$$

***Ответ***: $2\pi$.

**№7.** Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{2x\,dx}{1+x^4}$. или доказать его расходимость.

***Решение.***

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{2x\,dx}{1+x^4}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{2x\,dx}{1+x^4}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{d\left(x^2\right)}{1+\left(x^2\right)^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x^2\Big|_0^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}b^2-\operatorname{arctg}0^2\right)=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b^2=\frac{\pi}{2}.$$

***Ответ***: $\frac{\pi}{2}$.

**№8.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями: $y=x^2+4x-2,\ y=2x+1$.

***Решение.***
Уравнение $y=x^2+4x-2$ задает параболу, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты ее вершины:

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot 1}=-2,\ y_0=y(x_0)=(-2)^2+4\cdot(-2)-2=4-8-2=-6.$$

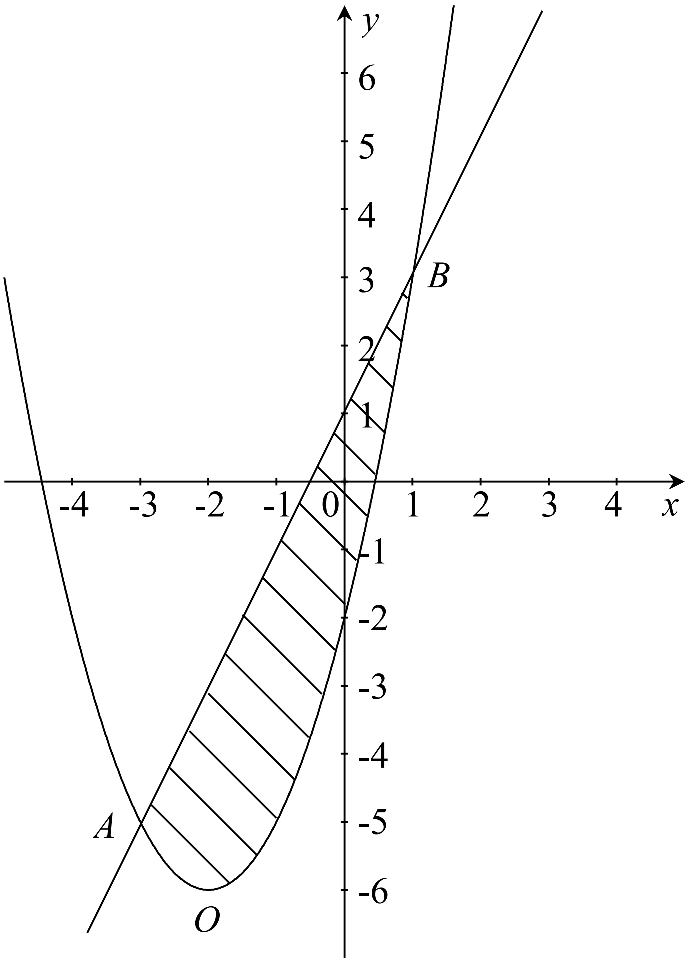
Значит, вершина параболы находится в точке $O(-2;-6)$.

Уравнение $y=2x+1$ определяет прямую. Найдем точки пересечения параболы и прямой, для чего составим систему из их уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 2; \\ y = 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 2 = 2x + 1; \\ y = 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0; \\ y = 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} x = -3; \\ x = 1; \end{array} \right. \\ y = 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = -3; \\ y = -5; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1; \\ y = 3. \end{cases} \end{array} \right.$$ Значит, $A(-3;-5)$ и $B(1;3)$ – искомые точки пересечения.

Построим графики этих функций:




Теперь вычислим площадь заштрихованной фигуры:

$$S = \int_{-3}^{1} \left(2x + 1 - \left(x^2 + 4x - 2\right)\right) dx = \int_{-3}^{1} \left(-x^2 - 2x + 3\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1\right) - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3 \cdot (-3)\right) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 - 9 + 9 + 9 = \frac{32}{3}.$$

***Ответ***: $\frac{32}{3}$.

## V. Решение практических заданий по теме «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

**№1.** Найти частные производные второго порядка функции $z = 6x^3y^2 - 2x^2y + x^4 + 3y^5 - 7$.

***Решение*.**

Сначала найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(6x^3y^2 - 2x^2y + x^4 + 3y^5 - 7\right)'_x = 18x^2y^2 - 4xy + 4x^3,$$

$$z'_y = \left(6x^3y^2 - 2x^2y + x^4 + 3y^5 - 7\right)'_y = 12x^3y - 2x^2 + 15y^4.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по $x$ и по $y$, найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(18x^2y^2 - 4xy + 4x^3\right)'_x = 36xy^2 - 4y + 12x^2,$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(12x^3y - 2x^2 + 15y^4\right)'_y = 12x^3 + 60y^3,$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(18x^2y^2 - 4xy + 4x^3\right)'_y = 36x^2y - 4x,$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(12x^3y - 2x^2 + 15y^4\right)'_x = 36x^2y - 4x.$$

***Ответ*:** $z''_{xx} = 36xy^2 - 4y + 12x^2$, $z''_{yy} = 12x^3 + 60y^3$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 36x^2y - 4x$.

**№2.** Найти полный дифференциал функции $u = \sin\left(\dfrac{x^2 + y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)$.

***Решение*.**

Найдем сначала частные производные данной функции:

$$u'_x = \left(\sin\left(\frac{x^2 + y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)\right)'_x = \cos\left(\frac{x^2 + y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)\cdot\frac{2x + \dfrac{y}{x}}{\sqrt{z^3y}},$$

$$u'_y = \left(\sin\left(\frac{x^2 + y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)\right)'_y = \cos\left(\frac{x^2 + y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)\cdot\frac{\ln x\sqrt{z^3y} - \dfrac{z^3\left(x^2 + y\ln x\right)}{2\sqrt{z^3y}}}{\left(\sqrt{z^3y}\right)^2},$$

$$u'_z = \left(\sin\left(\frac{x^2 + y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)\right)'_z = \cos\left(\frac{x^2 + y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)\cdot\frac{3z^2y\cdot\left(x^2 + y\ln x\right)}{-2\sqrt{\left(z^3y\right)^3}}.$$

Найдём полный дифференциал $u$ по формуле $du = u'_x\,dx + u'_y\,dy + u'_z\,dz$:

$$du=\left(\cos\left(\frac{x^2+y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)\cdot\frac{2x+\dfrac{y}{x}}{\sqrt{z^3y}}\right)dx+\left(\cos\left(\frac{x^2+y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)\cdot\frac{\ln x\sqrt{z^3y}-\dfrac{z^3\left(x^2+y\ln x\right)}{2\sqrt{z^3y}}}{\left(\sqrt{z^3y}\right)^2}\right)dy+$$

$$+\left(\cos\left(\frac{x^2+y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)\cdot\frac{3z^2y\left(x^2+y\ln x\right)}{-2\sqrt{\left(z^3y\right)^3}}\right)dz, \text{ или}$$

$$du=\cos\left(\frac{x^2+y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)\left(\frac{\left(2x+\dfrac{y}{x}\right)dx}{\sqrt{z^3y}}+\frac{\left(\ln x\sqrt{z^3y}-\dfrac{z^3\left(x^2+y\ln x\right)}{2\sqrt{z^3y}}\right)dy}{\left(\sqrt{z^3y}\right)^2}-\frac{3z^2y\left(x^2+y\ln x\right)dz}{2\sqrt{\left(z^3y\right)^3}}\right).$$

***Ответ***: $\cos\left(\frac{x^2+y\ln x}{\sqrt{z^3y}}\right)\left(\frac{\left(2x+\dfrac{y}{x}\right)dx}{\sqrt{z^3y}}+\frac{\left(\ln x\sqrt{z^3y}-\dfrac{z^3\left(x^2+y\ln x\right)}{2\sqrt{z^3y}}\right)dy}{\left(\sqrt{z^3y}\right)^2}-\right.$

$\left.-\frac{3z^2y\left(x^2+y\ln x\right)dz}{2\sqrt{\left(z^3y\right)^3}}\right).$

**№3.** Уравнение $x^2y-z^3+3x=4$ определяет в некоторой окрестности точки $A(3;0;-1)$ единственную неявную функцию вида $z=z(x;y)$. Вычислить значения ее частных производных в точке $(3;0)$.

***Решение.***

Для функции $z=z(x;y)$, заданной неявно уравнением $F(x;y;z)=0$, справедливы равенства: $z'_x=-\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}$; $z'_y=-\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}$.

В нашем случае $F(x;y;z)=x^2y-z^3+3x-4$, поэтому $F'_x=2xy+3$, $F'_y=x^2$, $F'_z=-3z^2$.

Следовательно, $z'_x=-\frac{2xy+3}{-3z^2}=\frac{2xy+3}{3z^2}$; $z'_y=-\frac{x^2}{-3z^2}=\frac{x^2}{3z^2}$.

Вычисляем значения найденных частных производных в точке $A(3;0;-1)$:

$$z'_x(3;0)=\left.\frac{2xy+3}{3z^2}\right|_A=\frac{2\cdot 3\cdot 0+3}{3\cdot(-1)^2}=1,\ z'_y(3;0)=\left.\frac{x^2}{3z^2}\right|_A=\frac{3^2}{3\cdot(-1)^2}=3.$$

***Ответ***: $z'_x(3;0)=1$, $z'_y(3;0)=3$.

**№4.** Найти производную сложной функции $z=\arcsin\frac{2y}{x}$, где $x=\cos t$, $y=\sin t$.

***Решение.***

Воспользуемся формулой: $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(2yx^{-1}\right)^2}}\cdot\left(-2yx^{-2}\right)=\frac{-2yx^{-2}}{\sqrt{1-\left(2yx^{-1}\right)^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(2yx^{-1}\right)^2}}\cdot\left(2x^{-1}\right)=\frac{2x^{-1}}{\sqrt{1-\left(2yx^{-1}\right)^2}};$$

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t;\ \frac{dy}{dt}=\cos t.$$

В итоге получим:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2yx^{-2}\sin t}{\sqrt{1-\left(2yx^{-1}\right)^2}}+\frac{2x^{-1}\cos t}{\sqrt{1-\left(2yx^{-1}\right)^2}}=\frac{2\,\mathrm{ctg}^2\,t}{\sqrt{1-(2\,\mathrm{tg}\,t)^2}}+\frac{2}{\sqrt{1-(2\,\mathrm{tg}\,t)^2}}=\frac{2\left(\mathrm{ctg}^2\,t+1\right)}{\sqrt{1-4\,\mathrm{tg}^2\,t}}=$$

$$=\frac{2}{\sin^2 t\sqrt{1-4\,\mathrm{tg}^2\,t}}.$$

***Ответ***: $\frac{dz}{dt}=\frac{2}{\sin^2 t\sqrt{1-4\,\mathrm{tg}^2\,t}}$.

**№5.** С помощью полного дифференциала вычислить приближённо $\sqrt[3]{9,98^2+5,03^2}$ (результат записать с двумя знаками после запятой).

***Решение.***

Представим данную величину в виде $\sqrt[3]{9,98^2+5,03^2}=\sqrt[3]{(10-0,02)^2+(5+0,03)^2}$

и введём функцию $f(x;y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$, где $x=x_0+\Delta x$; $x_0=10$; $\Delta x=-0,02$; $y=y_0+\Delta y$; $y_0=5$; $\Delta y=0,03$.

Воспользуемся приближённым равенством:
$f(x;y) = f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\cdot\Delta y$

Получим: $f(x_0;y_0) = \sqrt[3]{10^2+5^2} = 5$;

$$f'_x(x;y) = \left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}};\ f'_x(x_0;y_0) = \frac{2\cdot 10}{3\sqrt[3]{\left(10^2+5^2\right)^2}} = \frac{4}{3};$$

$$f'_y(x;y) = \left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{2y}{3\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}};\ f'_y(x_0;y_0) = \frac{2\cdot 5}{3\sqrt[3]{\left(10^2+5^2\right)^2}} = \frac{2}{3}.$$

Вычисляем: $\sqrt[3]{9{,}98^2+5{,}03^2} \approx 5 + \frac{4}{3}\cdot\left(-0{,}02\right) + \frac{2}{3}\cdot 0{,}03 = 5 - 0{,}027 + 0{,}02 \approx 4{,}99$.

***Ответ***: $\sqrt[3]{9{,}98^2+5{,}03^2} \approx 4{,}99$.

**№6.** Вычислить производную функции $z = 3x^3y^2 - 2x^5y^4 - 3x^3 + 3y$ в точке $M(1;-1)$ по направлению вектора $\vec{a} = (4;3)$.

***Решение***.

Воспользуемся формулой $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_M = grad\, z|_M \cdot \vec{a}^0$, где $grad\, z|_M = \left(z'_x(M); z'_y(M)\right)$ – градиент функции $z$ в точке $M$, а $\vec{a}^0$ – орт вектора $\vec{a}$.

Находим частные производные функции $z$:

$$z'_x = \left(3x^3y^2 - 2x^5y^4 - 3x^3 + 3y\right)'_x = 9x^2y^2 - 10x^4y^4 - 9x^2;$$

$$z'_y = \left(3x^3y^2 - 2x^5y^4 - 3x^3 + 3y\right)'_y = 6x^3y - 8x^5y^3 + 3.$$

Находим значения этих производных в точке $M$:

$$z'_x(M) = \left.\left(9x^2y^2 - 10x^4y^4 - 9x^2\right)\right|_M = 9\cdot 1^2\cdot(-1)^2 - 10\cdot 1^4\cdot(-1)^4 - 9\cdot 1^2 = -10;$$

$$z'_y(M) = \left.\left(6x^3y - 8x^5y^3 + 3\right)\right|_M = 6\cdot 1^3\cdot(-1) - 8\cdot 1^5\cdot(-1)^3 + 3 = 5.$$

Тогда $grad\, z|_M = (-10;5)$.

Орт $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a} = (a_1;a_2)$ находится по формуле $\vec{a}^0 = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|};\frac{a_2}{|\vec{a}|}\right)$, где $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$. В нашем случае $|\vec{a}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, $\vec{a}^0 = \left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$.

В итоге получаем: $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_M = (-10;5)\cdot\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right) = (-10)\cdot\frac{4}{5} + 5\cdot\frac{3}{5} = -5$.

***Ответ***: $-5$.

**№7.** Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности *S*, заданной уравнением $z = \operatorname{tg}^2(xy) + x\ln y$, в точке $M\left(\frac{\pi}{4};1;0\right)$.

***Решение.***

Представим функцию в неявном виде: $F\left(x;y;z\right) = \operatorname{tg}^2(xy) + x\ln y - z$. Находим частные производные первого порядка данной функции: $F'_x = \frac{2y\operatorname{tg}(xy)}{\cos^2\left(xy\right)} + \ln y$; $F'_y = \frac{2x\operatorname{tg}(xy)}{\cos^2\left(xy\right)} + \frac{x}{y}$; $F'_z = -1$.

Вычисляем значения этих частных производных в точке $M\left(\frac{\pi}{4};1;0\right)$:

$$F'_x(M) = \left.\left(\frac{2y\operatorname{tg}\left(xy\right)}{\cos^2\left(xy\right)} + \ln y\right)\right|_M = \frac{2\cdot 1\cdot \operatorname{tg}\left(1\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(1\cdot\frac{\pi}{4}\right)} + \ln 1 = 4;$$

$$F'_y(M) = \left.\left(\frac{2x\operatorname{tg}\left(xy\right)}{\cos^2\left(xy\right)} + \frac{x}{y}\right)\right|_M = \frac{2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot \operatorname{tg}\left(1\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(1\cdot\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{5\pi}{4};$$

$F'_z(M) = -1$.

Формула для нахождения уравнения касательной плоскости к поверхности *S* в точке $M\left(x_M;y_M;z_M\right)$ имеет вид:

$F'_x(M)\cdot\left(x - x_M\right) + F'_y(M)\cdot\left(y - y_M\right) + F'_y(M)\cdot\left(z - z_M\right) = 0$.

В нашем случае: $4\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5\pi}{4}\cdot\left(y-1\right) + \left(-1\right)\cdot\left(z-0\right) = 0$, или

$16x + 5\pi y - 4z - 9\pi = 0$ – искомое уравнение касательной плоскости.

Уравнения нормали к поверхности *S* в точке $M\left(x_M;y_M;z_M\right)$ имеют вид $\frac{x - x_M}{F'_x\big|_M} = \frac{y - y_M}{F'_y\big|_M} = \frac{z - z_M}{F'_z\big|_M}$.

В нашем случае:

$\frac{x - \frac{\pi}{4}}{4} = \frac{y-1}{\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{z-0}{-1}$, или $\frac{4x-\pi}{16} = \frac{4y-4}{5\pi} = \frac{z}{-1}$ – искомые уравнения нормали.

***Ответ***: $16x + 5\pi y - 4z - 9\pi = 0$, $\frac{4x-\pi}{16} = \frac{4y-4}{5\pi} = \frac{z}{-1}$.

**№8.** Исследовать функцию $z = 2x^3 + 6xy - 3y^2 - 36x + 2$ на локальный экстремум.

***Решение*.**

Находим частные производные первого и второго порядков функции $z$:

$$z'_x = \left(2x^3 + 6xy - 3y^2 - 36x + 2\right)'_x = 6x^2 + 6y - 36,$$

$$z'_y = \left(2x^3 + 6xy - 3y^2 - 36x + 2\right)'_y = 6x - 6y.$$

$$z''_{xx} = \left(6x^2 + 6y - 36\right)'_x = 12x,$$

$$z''_{yy} = \left(6x - 6y\right)'_y = -6,$$

$$z''_{xy} = \left(6x^2 + 6y - 36\right)'_y = 6.$$

Находим стационарные точки функции $z$, приравнивая частные производные первого порядка к нулю:

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6y - 36 = 0; \\ 6x - 6y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y - 6 = 0; \\ x = y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0; \\ x = y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3; \\ x = 2; \end{array}\right. \\ x = y; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3; \\ y = -3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2; \\ y = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Получили две стационарные точки: $M_1(2;2)$ и $M_2(-3;-3)$.

Исследуем функцию $z$ на экстремум в этих точках.

| $M_1(2;2)$: | $M_2(-3;-3)$: |
|---|---|
| $A = z''_{xx}(M_1) = 12x\big\|_{M_1} = 12 \cdot 2 = 24$; | $A = z''_{xx}(M_2) = 12x\big\|_{M_2} = 12 \cdot (-3) = -36$; |
| $B = z''_{xy}(M_1) = 6\big\|_{M_1} = 6$; | $B = z''_{xy}(M_2) = 6\big\|_{M_2} = 6$; |
| $C = z''_{yy}(M_1) = (-6)\big\|_{M_1} = -6$; | $C = z''_{yy}(M_2) = (-6)\big\|_{M_2} = -6$; |
| $\triangle = AC - B^2 = 24 \cdot (-6) - 6^2 = -180$. | $\triangle = AC - B^2 = (-36) \cdot (-6) - 6^2 = 180$. |
| Т.к. $\triangle < 0$, то экстремума в точке $M_1$ функция $z$ не имеет. | Т.к. $\triangle > 0$ и $A < 0$, то точка $M_2$ является точкой локального максимума. |

Найдём локальный максимум как значение функции $z$ в точке $M_2$:

$$z_{\max} = z(M_2) = 2(-3)^3 + 6 \cdot (-3) \cdot (-3) - 3 \cdot (-3)^2 - 36 \cdot (-3) + 2 = 83.$$

***Ответ*:** $z_{\max}(-3;-3) = 83$.

## VI. Решение практических заданий по теме «Дифференциальные уравнения»

**№1.** Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = e^x x^2 \left(1 + 4y^2\right)$.

***Решение.***

Полагая $y' = \dfrac{dy}{dx}$, запишем уравнения в виде: $dy = e^x x^2 \left(1 + 4y^2\right) dx$. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим обе части на выражение $1 + 4y^2 \neq 0$:

$$\frac{dy}{1 + 4y^2} = e^x x^2 \, dx.$$

Интегрируем: $\displaystyle\int \frac{dy}{1 + 4y^2} = \int e^x x^2 dx$.

К первому интегралу применим метод поднесения под знак дифференциала:

$$\int \frac{dy}{1 + 4y^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2y)}{1 + (2y)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2y) + C_1, \text{ где } C_1 = const.$$

Ко второму интегралу дважды применим формулу интегрирования по частям:

$$\int e^x x^2 dx = \begin{bmatrix} u = x^2; & du = 2x\,dx \\ dv = e^x dx; & v = e^x \end{bmatrix} = e^x x^2 - \int (2x) e^x dx = e^x x^2 - 2\int x e^x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = e^x dx; & v = e^x \end{bmatrix} = e^x \cdot x^2 - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2\left(x e^x - e^x\right) =$$

$$e^x \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) + C_2, \text{ где } C_2 = const.$$

В итоге получим:

$\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg}(2y) + C_1 = e^x \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) + C_2$, или, обозначив $C = 2C_2 - 2C_1$,

$\operatorname{arctg}(2y) = 2e^x \left(x^2 - 2x + 2\right) + C$ – общий интеграл ДУ.

***Ответ***: $\operatorname{arctg}(2y) = 2e^x \left(x^2 - 2x + 2\right) + C$, $C = const$.

**№2.** Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x\,dy - 2y\,dx = x\,dx$.

***Решение.***

Из данного уравнения находим: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y + x}{x}$.

Исходное уравнение является однородным уравнением первого порядка, поэтому применим подстановку $y = x \cdot u(x)$, где $u(x)$ – новая неизвестная функция. Получаем:

$$u'x + u = \frac{2xu + x}{x} \Leftrightarrow u'x + u = 2u + 1 \Leftrightarrow u'x = u + 1.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{du}{dx}x = u + 1;$$

$$\frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{u+1} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Делаем обратную подстановку $u = \dfrac{y}{x}$:

$$\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = \ln|x| + \ln|C|;$$

$$\frac{y}{x} + 1 = x \cdot C;$$

$y = Cx^2 - x$ – общее решение исходного уравнения.

***Ответ***: $y = x^2 C - x$.

**№3.** Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения:

а) $\left(x^2 - 1\right)y' - xy = x^3 - x,\ \ y\left(\sqrt{2}\right) = 1;$

б) $xy' + 2y + x^5 y^3 \mathrm{e}^x = 0,\ \ y(1) = 1.$

***Решение.***

а) Преобразуем уравнение:

$$y' - \frac{x}{x^2 - 1}y = x.$$

Это линейное ДУ первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – новые неизвестные функции, одна из которых может быть выбрана произвольным образом.

Имеем:

$$u'v + uv' - \frac{x}{x^2 - 1}v = x;$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{x}{x^2 - 1}v\right) = x. \quad (*)$$

Находим функцию $v(x)$, приравнивая выражение в скобках к нулю:

$v' - \frac{x}{x^2-1}v = 0$ – ДУ с разделяющимися переменными;

$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{x^2-1}v$;

$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{x\,dx}{x^2-1}$;

$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + \ln|C|$;

$v = C\sqrt{x^2-1}$.

Т.к. функцию $v(x)$ можно выбрать произвольно, положим $C=1$, тогда $v = \sqrt{x^2-1}$. Подставляем полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (*) и находим $u(x)$:

$u'\sqrt{x^2-1} + u\cdot 0 = x$;

$\frac{du}{dx}\sqrt{x^2-1} = x$ – ДУ с разделяющимися переменными;

$du = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$;

$\int du = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$;

$u = \sqrt{x^2-1} + C$.

Тогда $y = uv = \left(\sqrt{x^2-1}+C\right)\sqrt{x^2-1} = x^2-1+C\sqrt{x^2-1}$ – общее решение исходного уравнения.

Находим значение постоянной $C$, используя начальное условие $y\left(\sqrt{2}\right)=1$: $1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1 + C\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1} \Rightarrow C = 0$.

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид: $y = x^2-1$.

б) Преобразуем уравнение: $y' + \frac{2}{x}y = -x^4y^3\,e^x$.

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Решаем его с помощью подстановки $y = u(x)\cdot v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ – новые неизвестные функции, одна из которых может быть выбрана произвольным образом.

Имеем: $u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = -x^4\left(uv\right)^3 e^x$,

$u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = -x^4u^3v^3\,e^x$. (**)

Находим функцию $v(x)$, приравнивая выражение в скобках к нулю:

$v' + \frac{2}{x}v = 0$ – ДУ с разделяющимися переменными;

$\frac{dv}{dx} = -\frac{2}{x}v$;

$\frac{dv}{v} = -\frac{2\,dx}{x}$;

$\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x}$,

$\ln|v| = -2\ln|x| + \ln|C|$,

$v = \frac{C}{x^2}$.

Так как функцию $v(x)$ можно выбрать произвольно, положим $C = 1$, тогда $v = \frac{1}{x^2}$. Подставляем полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (**) и находим $u(x)$:

$u' \cdot \frac{1}{x^2} + u \cdot 0 = -x^4 u^3 \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 e^x$;

$u' = -u^3 e^x$ – ДУ с разделяющимися переменными;

$\frac{du}{-u^3} = e^x\,dx$;

$-\int \frac{du}{u^3} = \int e^x\,dx$;

$\frac{u^{-2}}{2} = e^x + C$;

$u = \frac{1}{\sqrt{2e^x + 2C}}$.

Тогда $y = uv = \left(\frac{1}{\sqrt{2e^x + 2C}}\right)x^{-2} = \frac{1}{x^2\sqrt{2e^x + 2C}}$ – общее решение исходного уравнения.

Находим значение постоянной $C$, используя начальное условие $y(1) = 1$:

$1 = \frac{1}{1^2\sqrt{2e^1 + 2C}} \Rightarrow C = 0{,}5 - e$.

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид: $y = \frac{1}{x^2\sqrt{2e^x + 1 - 2e}}$.

***Ответ***: а) $y = x^2 - 1$; б) $y = \frac{1}{x^2\sqrt{2e^x + 1 - 2e}}$.

**№4.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' = 1 - \sin 3x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = \frac{26}{27}$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = \frac{4}{3}$.

***Решение.***

Найдём $y''$:

$$y'' = \int (1 - \sin 3x)\,dx = x + \frac{1}{3}\cos 3x + C_1.$$

Воспользовавшись начальным условием $y''(0) = \frac{4}{3}$, определим $C_1$:

$$\frac{4}{3} = 0 + \frac{1}{3}\cos(3 \cdot 0) + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 1.$$

Уравнение примет вид: $y'' = x + \frac{1}{3}\cos 3x + 1$.

Найдём $y'$:

$$y' = \int \left( x + \frac{1}{3}\cos 3x + 1 \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{9}\sin 3x + x + C_2.$$

Воспользовавшись начальным условием $y'(0) = -2$, определим $C_2$:

$$-2 = \frac{0^2}{2} + \frac{1}{9}\sin(3 \cdot 0) + 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = -2.$$

Уравнение примет вид: $y' = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{9}\sin 3x + x - 2$.

Найдём $y$:

$$y = \int \left( \frac{x^2}{2} + \frac{1}{9}\sin 3x + x - 2 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{27}\cos 3x + \frac{x^2}{2} - 2x + C_3.$$

Воспользовавшись начальным условием $y(0) = \frac{26}{27}$, определим $C_3$:

$$\frac{26}{27} = \frac{0^3}{6} - \frac{1}{27}\cos(3 \cdot 0) + \frac{0^2}{2} - 2 \cdot 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 1.$$

Таким образом,

$y = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{27}\cos 3x + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$ – частное решение дифференциального уравнения.

***Ответ***: $y = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{27}\cos 3x + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$.

**№5.** Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 80y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = -6$.

***Решение*.**

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda - 80 = 0$.

Так как его корни $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 10$ являются действительными и различными, то общее решение дифференциального уравнения запишется в виде: $y = C_1 e^{-8x} + C_2 e^{10x}$.

Продифференцируем обе части этого равенства:

$y' = -8C_1 e^{-8x} + 10C_2 e^{10x}$.

Найдём частное решение исходного уравнения, воспользовавшись заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} y(0) = 3; \\ y'(0) = -6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ -8C_1 + 10C_2 = -6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 3 - C_1; \\ -8C_1 + 10\left(3 - C_1\right) = -6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 3 - C_1; \\ -18C_1 = -36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Таким образом, искомое частное решение запишется в виде:

$y = 2e^{-8x} + e^{10x}$.

***Ответ*:** $y = 2e^{-8x} + e^{10x}$.

**№6.** Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$;

б) $y'' + 2y' - 3y = \left(12x^2 + 6x - 4\right)e^x$.

***Решение*.**

а) Общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а $y^*$ – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$;

$D = -64 < 0$;

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i.$$

Так как корни уравнения являются комплексно-сопряжёнными, то общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$\bar{y} = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right)$.

Поскольку числа $0 \pm 4i = \pm 4i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение $y^*$ неоднородного уравнения будем искать в виде $y^* = A\cos 4x + B\sin 4x$, где постоянные $A$ и $B$ подлежат определению.

Дважды дифференцируем последнее равенство:

$\left(y^*\right)' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$;

$\left(y^*\right)'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$.

Подставляем $y^*$ и её производные в исходное уравнение:

$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x - 6\cdot\left(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x\right) +$

$+25\cdot\left(A\cos 4x + B\sin 4x\right) = 9\sin 4x - 24\cos 4x$;

$9A\cos 4x + 9B\sin 4x + 24A\sin 4x - 24B\cos 4x = 9\sin 4x - 24\cos 4x$.

Находим неизвестные $A$ и $B$, приравнивая коэффициенты при $\sin 4x$ и $\cos 4x$ в левой и правой частях последнего равенства:

$$\begin{cases} 9B + 24A = 9; \\ 9A - 24B = -24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8A + 3B = 3; \\ 3A - 8B = -8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9A - 24B = -24; \\ 64A + 24B = 24; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 73A = 0; \\ 64A + 24B = 24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0; \\ B = 1. \end{cases}$$

Получаем частное решение исходного неоднородного уравнения в виде $y^* = \sin 4x$.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид:

$y = e^{3x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right) + \sin 4x$.

б) Так же, как и в предыдущем примере, общее решение данного уравнения будем искать в виде $y = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а $y^*$ – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$;

$D = 16 > 0$;

$\lambda_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2} = -3$; $\lambda_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{16}}{2} = 1$.

Так как корни уравнения являются действительными и различными, то общее решение соответствующего исходному однородного уравнения запишется в виде:

$\overline{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$.

Поскольку правая часть исходного уравнения имеет вид $P_2(x)e^{1\cdot x}$, где $P_2(x)$ – многочлен второй степени, причем число $a=1$ является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение $y^*$ неоднородного уравнения будем искать в виде $y^* = x\cdot Q_2(x)\cdot e^{1\cdot x}$, или $y^* = \left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^x$, где постоянные $A$, $B$ и $C$ подлежат определению.

Дважды дифференцируем последнее равенство:

$$\left(y^*\right)' = \left(3Ax^2+2Bx+C\right)\cdot e^x + \left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)\cdot e^x =$$

$$=\left(Ax^3+(3A+B)x^2+(2B+C)x+C\right)e^x;$$

$$\left(y^*\right)'' = \left(3Ax^2+2(3A+B)x+(2B+C)\right)\cdot e^x + \left(Ax^3+(3A+B)x^2+(2B+C)x+C\right)\cdot e^x =$$

$$=\left(Ax^3+(6A+B)x^2+(6A+4B+C)x+(2B+2C)\right)e^x.$$

Подставляем $y^*$ и её производные в исходное уравнение:

$$\left(Ax^3+(6A+B)x^2+(6A+4B+C)x+(2B+2C)\right)e^x+$$

$$+2\left(Ax^3+(3A+B)x^2+(2B+C)x+C\right)e^x-3\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^x=$$

$$\left(12x^2+6x-4\right)e^x.$$

Разделим обе части равенства на $e^x$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной $x$ в левой и правой частях:

$x^3$ : $A+2A-3A=0;$

$x^2$ : $6A+B+6A+2B-3B=12;$

$x^1$ : $6A+4B+C+4B+2C-3C=6;$

$x^0$ : $2B+2C+2C=-4.$

Получим систему: $\begin{cases}12A=12;\\ 6A+8B=6;\\ 2B+4C=-4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=1;\\ B=0;\\ C=-1.\end{cases}$

Таким образом, частное решение исходного неоднородного уравнения запишется в виде: $y^*=\left(x^3-x\right)e^x$.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид:
$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x+\left(x^3-x\right)e^x$, или $y=C_1e^{-3x}+\left(x^3-x+C_2\right)e^x$.

***Ответ***: а) $y=e^{3x}\left(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x\right)+\sin 4x$;

б) $y=C_1e^{-3x}+\left(x^3-x+C_2\right)e^x$

**№7.** Найти частное решение дифференциального уравнения:
$y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

***Решение***.

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.
Так как его корни $\lambda_{1,2} = -1$ действительны и равны, то общее решение соответствующего однородного уравнения запишется в виде:
$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

При этом функции $y_1 = e^{-x}$ и $y_1 = x e^{-x}$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения.
Согласно методу вариации произвольных постоянных будем искать общее решение исходного неоднородного уравнения в виде: $y^* = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) x e^{-x}$, где неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подлежат определению.

Составляем систему для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)x e^{-x} = 0; \\ C_1'(x)\left(e^{-x}\right)' + C_2'(x)\left(x e^{-x}\right)' = \dfrac{e^{-x}}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)x e^{-x} = 0; \\ C_1'(x)\left(-e^{-x}\right) + C_2'(x)\left(e^{-x} - x e^{-x}\right) = \dfrac{e^{-x}}{x}. \end{cases}$$

Решим полученную систему относительно неизвестных $C_1'(x)$ и $C_1'(x)$ по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x} \cdot \left(e^{-x} - x e^{-x}\right) - x e^{-x} \cdot \left(-e^{-x}\right) = e^{-2x};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{-x} \\ \dfrac{e^{-x}}{x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{vmatrix} = 0 \cdot \left(e^{-x} - x e^{-x}\right) - x e^{-x} \cdot \frac{e^{-x}}{x} = -e^{-2x};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{e^{-x}}{x} \end{vmatrix} = e^{-x} \cdot \frac{e^{-x}}{x} - 0 \cdot \left(-e^{-x}\right) = \frac{e^{-2x}}{x}.$$

Получаем: $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-e^{-2x}}{e^{-2x}} = -1$; $C_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{e^{-2x}/x}{e^{-2x}} = \dfrac{1}{x}$.

Определяем $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$C_1(x) = \int(-1)\,dx = -x + C_1$; $C_2(x) = \int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C_2$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:
$y = \left(-x + C_1\right)e^{-x} + \left(\ln|x| + C_2\right)x e^{-x}$, или $y = e^{-x}\left(-x + x\ln|x| + C_1 + C_2 x\right)$.

***Ответ***: $y = e^{-x}\left(-x + x\ln|x| + C_1 + C_2 x\right)$.

**№8.** Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$$

***Решение.***

Дифференцируем первое уравнение системы:
$x'' = 6x' + 3y'$.
Заменим в последнем уравнении $y'$ его выражением из второго уравнения системы:
$x'' = 6x' + 3 \cdot \left(-8x - 5y\right)$, или $x'' = 6x' - 24x - 15y$.

Заменим в последнем равенстве $y$ на выражение $y = \dfrac{x' - 6x}{3}$ из первого уравнения системы:
$x'' = 6x' - 24x - 15 \cdot \dfrac{x' - 6x}{3}$, или $x'' - x' - 6x = 0$.
Решим последнее однородное ДУ, для чего составим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$;
$D = 25 > 0$;
$\lambda_1 = \dfrac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2$; $\lambda_2 = \dfrac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3$.
Так как корни уравнения являются действительными и различными, то общее решение уравнения запишется в виде:
$x = C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t}$.
Дифференцируя это равенство по $t$, получим:
$x' = 3C_1 \mathrm{e}^{3t} - 2C_2 \mathrm{e}^{-2t}$.

Находим $y$ из уравнения $y = \dfrac{x' - 6x}{3}$:
$$y = \frac{3C_1 \mathrm{e}^{3t} - 2C_2 \mathrm{e}^{-2t} - 6 \cdot \left(C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t}\right)}{3} = -C_1 \mathrm{e}^{3t} - \frac{8}{3} C_2 \mathrm{e}^{-2t}.$$

***Ответ***: $\begin{cases} x = C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t}; \\ y = -C_1 \mathrm{e}^{3t} - \dfrac{8}{3} C_2 \mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$

## Литература


1. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Наука, 1984. − 432 с.

2. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Наука, 1981. − 448 с.

3. Герасимович, А.И. Математический анализ: Справочное пособие в 2-х частях / А.И. Герасимович и др. − Мн.: Выш. шк., 1990. − 272 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко, IIч. − Мн.: Выш. шк., 2007. − 367 с.

5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2-х томах / Н. С. Пискунов. − М.: Наука, 1985. − Т.1 432 с., Т.2 560 с.

6. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: в 2-х частях / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. − Мн.: Выш. шк., 1993. − Ч.1 416 с., Ч.2 304 с.

7. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. − М.: Астрель: АСТ, 2005. − 991 с.

8. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. − Мн.: ТетраСистемс, 2000. − 640 с.

9. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. − Мн.: Высш. шк., 1997. − Ч.1 304 с., Ч.2 416 с.

10. Лудерер, Б. Высшая математика в экономике, технике, информатике: справочник: пер. с нем. / Б. Лудерер, Ф. Наллау, К. Феттерс; под ред. А.В. Самусенко, В.В. Казаченок. − Мн.: Выш. шк., 2005. − 279 с.

11. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Ч.1 / Д.Т. Письменный. − М.: АйрисПресс, 2004. − 288 с.

## Содержание

**Учебное издание**

**Составители: Махнист Леонид Петрович**
**Юхимук Михаил Михайлович**
**Юхимук Татьяна Юрьевна**

# Интегральное исчисление функций одной переменной

# Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

# Дифференциальные уравнения

Методические рекомендации и варианты заданий аттестационных работ по курсу «Математика» для студентов строительных специальностей дневной формы обучения

Ответственный за выпуск: Махнист Л.П.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Соколюк А.П.

Подписано в печать 25.05.2015 г. Формат 60x841/16. Бумага «Performer». Гарнитура «Arial» Усл. п. л. 2,79. Уч. изд. л. 3,0. Заказ № 551. Тираж 80 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.